طرق كميّة



اسم الطالبة
أسماء عبدالرحمن بابدر

الاسبوع الاول

التحليل الكمي

أساسيات التحليل الكمي
في
الأقتصاد والإدارة
تأليف
إ.د. عبد العزيز دياب

الفصل الاول

الدوال وتطبيقاتها الإدارية والاقتصادية

الفصل الاول : الدوال وتطبيقاتها الإدارية والاقتصادية

- الدوال
- الصورة العامة للدالة الخطية
- الدالة الخطية بمعلومية نقطتين
- الدالة الخطية بمعلومية الميل ونقطة
- الداول الاقتصادية والإدارية الخطية .

المحاضرة الاولي

تعريف الدالة

- تعريف الدالة : هي تعبير رياضي يعكس العلاقة بين متغيرين او اكثر ، احدهما تابع والأخر مستقل

متغير تابع ← ص = دس → متغير مستقل

ص تسمي دالة في س ، أي بمعني يمكن ايجاد قيمة ص بدلالة قيم س أي قيمة المتغير (ص) تعتمد علي قيم س وتتحدد علي اساسها.
أي تغير يحدث في المتغير المستقل (س) سيؤدي إلي حدوث تغير مناظر في المتغير(ص)

ويمكننا القول أن قيمة الثابت (ى) هي قيمة المتغير التابع (ص) عندما تكون قيمة المتغير المستقل (س) تعادل الصفر ، أي أن : ص = ى عند س = صفر
كما أن قيمة الثابت (م) يمثل مقدار التغير في قيمة المتغير التابع (ص) عندما تتغير قيمة المتغير المستقل (س) بمقدار وحدة واحدة وبحسب طبيعة العلاقة بين المتغيرْين (س ، ص) وهل هي طردية أم عكسية

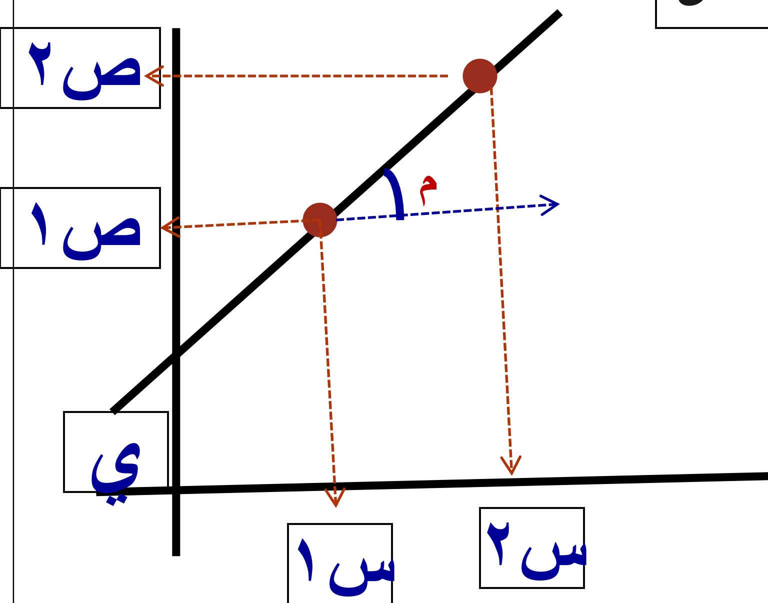
الدالة الخطية

- المعادلة (الدالة)

الصورة العامة للدالة الخطية :تأخذ معادلة الخط المستقيم الصورة التالية :

ص = ى + م س

متغير تابع — المقدار الثابت — الميل — متغير مستقل



ص: المتغير التابع

س :المتغير المستقل أو التفسيرى

ى : مقطع الدالة

المقدار الثابت / (قيمة ص عندما تكون س = صفر)

طرق(صور) ايجاد معادلة الخط المستقيم

نقطتين معلومتين

$$\frac{ص - ص_{١}}{س - س_{١}} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$$

نقطة وميل

$$\frac{ص - ص_{١}}{س - س_{١}} = م$$

إيجاد معادلة الخط المستقيم (إيجاد الدالة الخطية)

مثال(١-٢) ص٩ : أوجدى معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين(٢ ، ٢)، (٤ ، ٨)

الاجابة

الدالة الخطية بمعلومية نقطتين :

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

النقطتين (٢ ، ٢) ، (٤ ، ٨)

(س١، ص١) ، (س٢، ص٢)

$$\frac{ص - ٢}{س - ٢} = \frac{٨ - ٢}{٤ - ٢} = \frac{٦}{٢}$$

$$\frac{ص - ٢}{س - ٢} = \frac{٣}{١}$$

١ (ص-٢)=٣(س-٢)

ص - ٢ = ٣(س-٢)

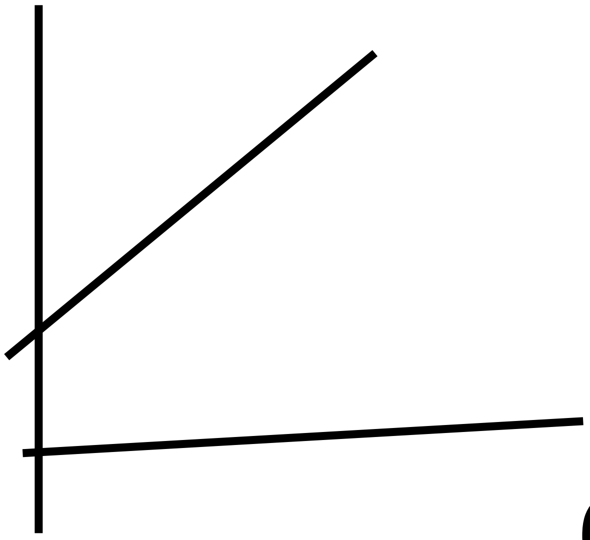
ص - ٢ = ٣س-٦

ص=-٤ +٣س

ص=٣س - ٤ ⇦ معادلة الخط المستقيم

إيجاد معادلة الخط المستقيم (إيجاد الدالة الخطية)

بمعلومية الميل و نقطة واحدة



$$\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \text{م}$$

<u>أو</u>

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} \left(\text{س} - \text{س}_1 \right)$$

مثال (١ـ ٤) ص ١١

- أوجدى معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ـ ٢) إذا كان ظل الزاوية التى يصنعها الخط مع الاتجاه الموجب للمحور السينات يساوى ـ ٥

الاجابة

النقطة (٣ ، ـ٢) ، م = ـ٥

(س١، ص١) ،

$$ص - ص_1 = م (س - س_1)$$

الدالة الخطية :

مثال (١ـ ٤) ص ١١

- أوجدى معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ـ ٢) إذا كان ظل الزاوية التى يصنعها الخط مع الاتجاه الموجب للمحور السينات يساوى ــ ٥

الاجابة

النقطة (٣ ، ـ٢) ، م = ـ٥

(س١، ص١) ،

ص — ص١ = م (س — س١)

ص — (ـ٢) = ـ٥ (س — ٣)

ص +٢ = ـ٥ س + ١٥

ص = ـ٥ س + ١٣

الدالة الخطية :

ص = ـ٥ س + ١٣

ص = ١٣ـ٥ س

تطبيقات علي الداول الخطية
الدوال الاقتصادية والإدارية

- دالة الطلب
- دالة الطلب الخطية
- دالة العرض
- دالة تكاليف الإنتاج

تطبيقات علي الداول الخطية
الدوال الاقتصادية والإدارية

- دالة الطلب
- الطلب : الكميات التى يرغب المستهلكون فى شرائها من سلعة أو خدمة خلال فترة زمنية عند أسعار مختلفة ، على أن تكون الرغبة مقترنة بالقدرة على الشراء .
- محددات الطلب :
- العلاقة بين سعر السلعة والكمية المطلوبة (قانون الطلب الذى ينص على العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة والسعر)

تابع محددات الطلب

- أثر تغير الدخل : العلاقة طر دية بين دخل المستهلك والكمية المطلوبة.
- أثر تغير سعر سلعة مكملة :
- العلاقة عكسية بين سعر سلعة مكملة والكمية المطلوبة من السلعة.
- أثر تغير سعر سلعة بديلة :
- العلاقة طردية بين سعر سلعة بديلة والكمية المطلوبة من السلعة.

دالة الطلب الخطية

- ط = ى - م ث

الكمية المطلوبة

المقدار الثابت

الميل

سعر السلعة

ط: المتغير التابع

ث :المتغير المستقل أو التفسيرى

ى : الكمية المطلوبة عندما يكون السعر مساويا للصفر

- م ميل دالة الطلب الخطية وهو ثابت ويمثل معدل التغير فى الكمية المطلوبة عندما يتغير السعر بوحدة نقدية واحدة .
- إشارة الميل سالبة لتدل على وجود العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة والسعر.

مثال(١ ـ ٩)ص ١٩

- العلاقة بين الكمية المطلوبة (ط) وسعر الوحدة (ث) بأحد المؤسسات التجارية بجدة علاقة خطيَة بحيث عندما يكون السعر ١٥٠٠ ريال تكون الكمية المطلوبة ٢٠ وحدة ، وعندما يصبح السعر ١٠٠٠ ريال تزيد الكمية المطلوبة إلى ١٠٠ وحدة.
- المطلوب :

١. إيجاد دالة الطلب الخطيِة.
٢. إيجاد الكمية المطلوبة عند سعر بيع ١٢٠٠ ريال.

الاجابة

الدالة بمعلومية نقطتين :

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

ث١=١٥٠٠ ط١=٢٠

ث٢=١٠٠٠ ط٢=١٠٠

دالة الطلب بمعلومية نقطتين :

$$\frac{ط - ط_١}{ث - ث_١} = \frac{ط_٢ - ط_١}{ث_٢ - ث_١}$$

الإجابة

دالة الطلب الخطية بمعلومية نقطتين :

ث١=١٥٠٠ ط١=٢٠

ث٢=١٠٠٠ ط٢=١٠٠

(ط − ط١) / (ث − ث١) = (ط٢ − ط١) / (ث٢ − ث١)

(ط − ٢٠) / (ث − ١٥٠٠) = (١٠٠ − ٢٠) / (١٠٠٠ − ١٥٠٠)

(ط − ٢٠) / (ث − ١٥٠٠) = ٨٠ / (− ٥٠٠)

-٥٠٠(ط-٢٠) = ٨٠ (ث - ١٥٠٠)

-٥٠٠ط + ١٠٠٠٠ = ٨٠ ث - ١٢٠٠٠٠

-٥٠٠ ط = ٨٠ ث - ١٢٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠

- ٥٠٠ ط = ٨٠ ث - ١٣٠٠٠٠

وبقسمة الطرفين علي -٥٠٠

ط = -١٦,٠ ث + ٢٦٠

ط = ٢٦٠ -١٦.٠ ث

إيجاد الكمية المطلوبة عند سعر بيع ١٢٠٠ ريال.

ط = ٢٦٠ ـ .١٦ ث

التعويض عن سعر بيع ١٢٠٠ في المعادلة

ط = ٢٦٠ ـ ٠,١٦ × ١٢٠٠

ط = ٢٦٠ ـ ١٩٢ = ٦٨ وحدة

• مثال (١-١٠)ص ٢٠

اذا كانت العلاقة بين الطلب (ط) والسعر (ث) علاقة خطية بحيث انه عند الطلب ٢٠٠ وحدة يكون السعر ١٠ وكان معدل التغير في الكمية المطلوبة (الميل) = ٤، المطلوب إيجاد معادلة الخط المستقيم التي تصف العلاقة بين سعر السلعة والكمية المطلوبة منها .

الاجابة

النقطة (١٠ ، ٢٠٠) ، م = -٤

(ث١ ، ط١) ،

ط − ط١ = م (ث − ث١)

ط − ٢٠٠ = -٤ (ث − ١٠)

ط -٢٠٠ = -٤ ث + ٤٠

ط = ٢٤٠ - ٤ث

دالة العرض

- العرض هو الكميات التى ترغب الوحدات الإنتاجية إنتاجها وبيعها عند أسعار مختلفة خلال فترة زمنية معينة .

دالة العرض

:العرض هو الكميات التى ترغب الوحدات الإنتاجية إنتاجها وبيعها عند أسعار مختلفة خلال فترة زمنية معينة .

محددات العرض : ص 24 – 25

١)سعر السلعة : توجد علاقة طرديَة بين سعر السلعة والكمية المعروضة .

٢)أسعار عناصر الإنتاج : توجدعلاقة عكسيَة بين أسعار عناصر الإنتاج والكمية المعروضة . مثلا انخفاض أجور العمال يمثل انخفاض فى تكلفة الإنتاج مما يجعل يوجد الحافز لزيادة الكميات المنتجة والمعروضة من السلعة لزيادة مستوى الأرباح والعكس صحيح .

٢)الضرائب غير المباشرة والإعانات: العلاقة عكسية بين الضرائب والكمية المعروضة وطردية بين الإعانات والكمية المعروضة

تابع محددات العرض

٤) **المستوى التقنى والفنى** : توجد علاقة طرديه لأن المستوى التقنى والفنى وبين الكمية المعروضة فإرتفاع المستوي التقني يؤدى إلى زيادة الكمية المعروضة من السلعة

٥) **أهداف الوحدة الإنتاجية** : عندما يكون من اهداف المنتج عدم دخول في انتاج السلع والخدمات التي يتطلب إنتاجها مخاطرة عالية ، والاكتفاء بإنتاج السلع والخدمات التي تكون درجة المخاطرة في إنتاجها منخفضة وهذا يعني ان الهدف االمنشأة الي التقليل من المخاطرو يجعلها تتجه الي انتاج السلع الاقل مخاطرة والعكس صحيح

٦) **أسعار السلعة المنافسة فى استخدام الموارد**: توجد علاقة عكسية بين أسعار السلع المنافسة والكمية المعروضة من السلعة.

٧) **عدد الوحدات الإنتاجية** : زيادة عدد المنتجين يؤدى إلى زيادة الكمية المعروضة من السلعة .

دالة العرض الخطية

ض = ى + م ث

- ض ← الكمية المعروضة
- ى ← المقدار الثابت
- م ← الميل
- ث ← سعر السلعة

ض: المتغير التابع

ث :المتغير المستقل أو التفسيرى

- ى الكمية المعروضة عندما يكون السعر مساويا للصفر
- م ميل دالة العرض الخطية وهو ثابت ويمثل معدل التغير فى الكمية المعروضة عندما يتغير السعر بوحدة نقدية واحدة .
- إشارة الميل موجبة لتدل على وجود العلاقة الطرديَة بين الكمية المعروضة والسعر.

مثال(١ ـ١٣)ص ٢٤

- العلاقة بين الكمية المعروضة من أحد الأجهزة الكهربائية ض وسعرها ث علاقة خطية بحيث أنه إذا كان السعر ٤٠٠ ريال يتم عرض ٢٠ جهاز وعندما يرتفع السعر إلى ١٦٠٠ يتم عرض ١٠٠ جهاز
- المطلوب :

١) إيجاد دالة العرض الخطية

٢) إيجاد سعر البيع عندما تكون الكمية المعروضة ٢٠٠ جهاز

الاجابة

الدالة بمعلومية نقطتين :

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

ث١ = ٤٠٠ ض١ = ٢٠

ث٢ = ١٦٠٠ ض٢ = ١٠٠

دالة العرض بمعلومية نقطتين :

$$\frac{ض - ض_1}{ث - ث_1} = \frac{ض_2 - ض_1}{ث_2 - ث_1}$$

الإجابة

دالة العرض الخطية بمعلومية نقطتين :

ث١ = ٤٠٠ ض١ = ٢٠

ث٢ = ١٦٠٠ ض٢ = ١٠٠

$$\frac{\text{ض} - \text{ض}_{١}}{\text{ث} - \text{ث}_{١}} = \frac{\text{ض}_{٢} - \text{ض}_{١}}{\text{ث}_{٢} - \text{ث}_{١}}$$

$$\frac{\text{ض} - ٢٠}{\text{ث} - ٤٠٠} = \frac{١٠٠ - ٢٠}{١٦٠٠ - ٤٠٠}$$

$$\frac{\text{ض} - ٢٠}{\text{ث} - ٤٠٠} = \frac{٨٠}{١٢٠٠} = \frac{١}{١٥}$$

$$١٥\text{ض} - ٣٠٠ = \text{ث} - ٤٠٠$$

$$١٥\text{ض} = \text{ث} - ١٠٠$$ وبقسمة الطرفين علي ١٥

$$\text{ض} = -\frac{١٠٠}{١٥} + \frac{١}{١٥}\text{ث}$$

تحديد سعر البيع عند طرح ٢٠٠ جهاز للبيع

ض= - ١٠٠ / ١٥ + ١ / ١٥ ث   بضرب الطرفين علي ١٥

١٥ ض = - ١٠٠ + ث

عند عرض ٢٠٠ جهاز للبيع يكون سعر البيع هو :

١٥ × ٢٠٠ = - ١٠٠ + ث

١٥ × ٢٠٠ = - ١٠٠ + ث

١٥ × ٢٠٠   - ١٠٠ = ث

ث = ٣١٠٠ ريال

توازن السوق

- مثال ١ ـ١٤ ص ٣٠ / ٢٦
- حددى سعر التوازن وكمية التوازن عندما تكون دالتى العرض والطلب على النحو التالى :

ض = ٣ ث + ٥ دالة العرض

ط = ٢٥ ـ ٢ ث دالة الطلب

ث = ٤

ض= ١٧ (الكمية التوازنية)

الحل :

ض = ٣ ث + ٥ دالة العرض

ط = ٢٥ ـ ٢ ث دالة الطلب

ض = ط

٣ ث + ٥ = ٢٥- ٢ث

٣ ث + ٢ث = ٢٥- ٥

٥ث = ٢٠

ث = ٤ السعر التوازني

بالتعويض عن قيمة السعر في احدي المعادلتين

ض = ٣ × ٤ + ٥=١٧

ض= ١٧ الكمية التوازنية

- مع تمنياتي بالنجاح

٢

تابع الفصل الأول

الدوال وتطبيقاتها الاقتصادية والإدارية

الإنتاج وتكاليف الإنتاج فى الأجل القصير

- الإنتاج هو عملية خلق السلع والخدمات
- دالة الإنتاج : علاقة بين الإنتاج وكمية عناصر الإنتاج
- دالة الإنتاج فى الأجل القصير : إذا كان يمكن تغيير أحد عناصر الإنتاج مع ثبات العناصر الأخرى . مثلا عنصر العمل سيكون العنصر المتغير وعنصر الأرض هو العنصر الثابت.

- ترتبط بدالة الإنتاج فى الأجل القصير ،دالة التكلفة فى الأجل القصير : جزء من التكلفة ثابت مقابل العنصر الإنتاجى الثابت (ريع الأرض مثلا) وهذا الجزء ليس له علاقة بحجم الإنتاج.
- جزء من التكلفة متغير يتأثر بحجم الإنتاج وهو مقابل العنصر الإنتاجى المتغير

الدوال الخطية

(٣) دالة الإنتاج : هي صيغة توضح العلاقة بين مدخلات الإنتاج (عناصر الإنتاج) والمخرجات (الكمية المنتجة من سلعة أو خدمة ما)

- ويمكن صياغتها رياضيا كالتالي :

ج = د (هـ ، و ، ز)

حيث أن : ج حجم الإنتاج الكلي ، هـ الكمية المستخدمة من الأرض ، و عدد العمال ، ز الكمية المستخدمة من رأس المال .

ويلاحظ بصفة عامة أن هناك علاقة طردية بين حجم الإنتاج الكلي وكمية عناصر الإنتاج المستخدمة.

- دالة الإنتاج في الأجل القصير:

أفترض فيها ان المنتج يستطيع تغيير الكمية المستخدمة من جميع المدخلات ما عدا مدخل واحد على الأقل لا يستطيع تغيير الكمية المستخدمة منه وتكون ثابتة . أو العكس (أي جميع العناصر ثابتة وواحد متغير) . من قبيل التسهيل لنفترض أن المنتج يستخدم عنصري إنتاج فقط وهما الأرض والعمل . ولنفترض أن الكمية المستخدمة من الأرض ثابتة ، بينما يمثل عدد العمال العنصر المتغير ، وبالتالي فإن دالة الإنتاج تصبح : ج = د (هـ ، و)

- الإنتاج الحدي للعنصر (ج) مقدار أو معدل التغير في الإنتاج الكلي نتيجة لتغير الكمية المستخدمة من العنصر الإنتاجي (و) بمقدار وحدة واحدة . بمعنى آخر :

$$ج_{ن} = ج_{ن} - ج_{ن-١} = \frac{\Delta ج}{\Delta و}$$

حيث ن تمثل : الوحدة رقم ن من العنصر الانتاجي

الانتاج المتوسط (ج م) لأي عنص انتاجي وليكن (و) وهو متوسط ما نسهم به كل وحدة من هذا العنصر في الانتاج الكلي ، أي :

$$ج\ م = \frac{\text{حجم الإنتاج الكلي ج}}{\text{عدد الواحدات المستخدمة من العنصر الانتاجي}}$$

حيث أن : ج حجم الإنتاج الكلي ، هـ الكمية المستخدمة من الأرض ، و عدد العمال ، ز الكمية المستخدمة من رأس المال .

ويلاحظ بصفة عامة أن هناك علاقة طردية بين حجم الإنتاج الكلي وكمية عناصر الإنتاج المستخدمة.

مثال بالا يميس بفرض أن الدالة التالية تمثل العلاقة بين حجم الإنتاج لسلعة ما(ج) وكمية عنصر العمل الذي ساهم في العملية الإنتاجية (و): ج= ٥٠٠٠+ ٥(و)

- المطلوب : شرح مدلول هذه الدالة موضحا ما تشير إليه من طبيعية العلاقة بين الإنتاج (ج) وعدد العمال (و) . إذا كان المستهدف هو زيادة الكمية المطلوبة من السلعة إلي ٥٥٠٠ وحدة ، فما هو عدد العمال الذي نتوقع أن يحقق لنا هذا المستوي من الإنتاج ؟
- **الحل : طبيعية العلاقة بين المتغيرين :**
- **تعكس المعادلة** ج= ٥٠٠٠+ ٥(و) مايلي :
- **العلاقة بين المتغيرين (ج، و) علاقة خطية ، حيث تتوقف قيمة المتغير التابع (ج) علي القيمة التي يأخذها السعر المستقل (و) . أن قيمة الثابت (ي) تساوي ٥٠٠٠، ويعني ذلك أن القيمة التقديرية للمتغير التابع (ج) يساوي ٥٠٠٠ عندما تساوي قيمة المتغير المستقل (و) صفرا.**
- **ان معامل المتغير المستقل (و) نأخذ إشارة موجبة ويساوي (٥) مما يشير إلي أن العلاقة بين المتغيرين (ج،و) علاقة طردية ، فزيادة السعر المستقل عدد العمال (و) بمقدار عامل واحد يريد القيمة التقديرية للمتغير التابع حجم إنتاج (ج) بمقدار (٥) وحدات .**

- لإيجاد الإنتاج المتوسط للعامل الواحد عندما يكون عدد العمال يساوي ١٠٠ عامل
- ج= ٥٠٠٠+ ٥(و)
- الانتاج المتوسط = الانتاج الكلي ÷ عدد العامل
- **اولاً: ايجاد الانتاج الكلي**

ج= ٥٠٠٠+ ٥(١٠٠)

ج= ٥٥٠٠ وحدة

- **ثانياً: الانتاج المتوسط**

ج م ٥٥٠٠÷ ١٠٠ = ٥٥ وحدة

دالة التكاليف الخطية فى الأجل القصير

- التكاليف الكلية فى الأجل القصير = التكاليف الثابتة + التكاليف المتغيرة

ت = ت ث + ت غ

- التكاليف الثابتة = هى التكاليف التى تتحملها المنشأة سواءأنتجت أم لم تنتج

التكاليف المتغيرة = هى التكاليف التى تتغير مع تغير حجم الإنتاج، وتساوي صفر عندما يكون الانتاج صفر

= كمية عناصر الانتاج المتغيرة المستخدمة× اسعارها

- التكلفة الحدية= معدل التغير فى التكلفة الكلية أو المتغيرة نتيجة تغير الإنتاج بوحدة واحدة
- وبمعني اخر هي تكاليف إنتاج الوحدة الإضافية أو الأخيرة
- ت ح $_{ن}$ = ت $_{ن}$ – ت $_{ن-١}$

تابع دالة التكاليف فى الأجل القصير

- التكاليف المتوسطة
- هى تكلفة الوحدة الواحدة فى المتوسط وتساوى

ت م = ت ÷ ج أى التكلفة الكلية مقسومة على حجم الإنتاج

التكاليف المتوسط المتغيرة = م غ = ت غ ÷ ج

التكاليف المتوسط الثابتة = م ث = ت ث ÷ ج

ت م = م غ + م ث

الصيغة العامة لدالة التكلفة الخطية

الجدير بالذكر : ان هناك علاقة طردية بين الكمية المنتجة من سلعة ما وتكاليف إنتاجها

ويمكن تصوير دالة تكاليف الإنتاج بالشكل التالي : ت = د(ج)

ت = ي+ م ج

ت = ت ث + م ج

ت ث التكلفة الثابتة

م ميل دالة التكلفة = التكلفة الحدية = تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة المتغيرة

ج حجم الإنتاج أو عدد الوحدات المنتجة

- مثال ١ ـ ١٥ ص 31 العلاقة بين كمية الإنتاج ج وتكلفة الإنتاج ت بأحد المصانع علاقة خطية بحيث أنه عند إنتاج ٣٠ وحدة تكون التكلفة الكلية ٨٠٠ ريال وعند إنتاج ١٠٠ وحدة تكون التكلفة الكلية ١٥٠٠ ريال.
- المطلوب:

١) إيجاد دالة التكلفة الخطية.

٢) التكلفة الثابته

٣) التكلفة المتغيرة عند انتاج ٢٠٠ وحدة

٤) التكلفة الحدية للوحدة الواحدة (التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة)

٥) التكاليف الكلية عند انتاج ٢٠٠ وحدة

٦) تكلفة إنتاج ٢٠٠ وحدة (التكلفة المتوسطة عند انتاج ٢٠٠ وحدة)

ت= ٥٠٠ + ١٠ ج

- التكلفة الثابته = ٥٠٠

- التكلفة المتغيرة = ١٠ ج

اذن التكلفة المتغيرة عند انتاج ٢٠٠ وحدة = ١٠ × ٢٠٠

=٢٠٠٠

-التكلفة الحدية للوحدة الواحدة(التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة)

= ١٠

- التكاليف الكلية عند انتاج ٢٠٠ وحدة

- ت = ٥٠٠ +(١٠ × ٢٠٠)
- ت = ٥٠٠ + ٢٠٠٠ = ٢٥٠٠ ريال

- التكلفة المتوسطة عند انتاج ٢٠٠ وحدة = ١٢,٥ ريال

= ٢٥٠٠ ÷ ٢٠٠ = ١٢,٥

مثال(١-١٥) ص٣١:

تكاليف الانتاج ت	كمية الانتاج ج
ت١=٨٠٠	ج١ =٣٠
ت٢=١٥٠٠	ج٢=١٠٠

$$\frac{\text{ت} - \text{ت١}}{\text{ج} - \text{ج١}} = \frac{\text{ت٢} - \text{ت١}}{\text{ج٢} - \text{ج١}}$$

$$\frac{\text{ت} - ٨٠٠}{\text{ج} - ٣٠} = \frac{١٥٠٠ - ٨٠٠}{١٠٠ - ٣٠}$$

$$\frac{\text{ت} - ٨٠٠}{\text{ج} - ٣٠} = \frac{٧٠٠}{٧٠} = ١٠$$

١٠(ج-٣٠) =(ت- ٨٠٠)

١٠ج-٣٠٠ = ت- ٨٠٠

ت= ١٠ج-٣٠٠+ ٨٠٠

ت= ١٠ج + ٥٠٠

دالة الاستهلاك

- الاستهلاك يتوقف على مستوى الدخل القومى : كلما زاد الدخل زاد الاستهلاك فالعلاقة طردية بينهما.
- دالة الاستهلاك الخطية بالشكل التالى:

س = ى + م ل

س :الاستهلاك

ل : الدخل الممكن التصرف فيه

ى :مستوى الاستهلاك عند ما يكون الدخل مساويا للصفر(الحد الأدنى للاستهلاك أو حد الكفاف او الاستهلاك التلقائي)

م :ميل دالة الاستهلاك = الميل الحدى للاستهلاك

الميل الحدي للأدخار = ١ـ الميل الحدي للأستهلاك = ١ـ م

الميل الحدي للأستهلاك + الميل الحدي للأدخار = ١

مثال ١ -١٧ ص 34

- بفرض أن العلاقة خطية بين الاستهلاك القومى س والدخل القومى ل بحيث أنه عند المستويات المختلفة للدخل يكون الاستهلاك مساويا ٥ مليون ريال بالإضافة إلى ٦٥% من الدخل .
- أوجدى معادلة الخط المستقيم التى توضح العلاقة بين الاستهلاك والدخل .
- اوجدي الاستهلاك بتلك الدولة عندما يكون الدخل الممكن التصرف فيه يقدر بمبلغ ١٥ مليون ريال

- العلاقة هى :

س = ٥ + ٠,٦٥ ل

- معادلة الخط المستقيم المطلوبة هي :

س = ٥٠٠٠٠٠٠٠ + ٠,٦٥ ل

- تحديد الاستهلاك عند مستوي دخل ١٥ مليون ريال :

عندما يكون الدخل الممكن التصرف فيه يقدر بمبلغ ١٥ مليون ريال ، يكون الاستهلاك الكلي بتلك الدولة:

س = ٥ + ٠,٦٥ × ١٥= ١٤.٧٥ مليون ريال

الاستهلاك عندما يكون الدخل ١٥ مليون ريال = ١٤,٧٥ مليون ريال

المحاضرة الثانية

معادلات من الدرجة الثانية
الدوال غير الخطية

المعادلات من الدرجة الثانية
الدوال غير الخطية

الدالة كثيرة الحدود :

$ص = أ_{صفر} س^{ن} + أ_{1} س^{ن-١} + ...+ أ_{ن}$

أمثلة :

الدالة التربيعية أكبر أس هو ٢ مثل:

$ص= س^{٢} + ٢ س - ٣$

الدالة التكعيبية أكبر أس هو ٣ مثل :

$ص = ٢س^{٣} - ٥ س^{٢} +٤ س - ١٥$

المعادلة من الدرجة الثانية(الدالة التربيعية)

- هناك تطبيقات متعددة لهذه الدالة ، امثلة :
- دالة التكلفة المتوسطة
- دالة الإنتاجية الحدية
- دالة الايراد
- دالة الربح

- الصورة الصفرية للدالة

$$أس^٢ + ب س + جـ = صفر$$

طرق حل المعادلة من الدرجة الثانية

١) طريقة التحليل
٢) باستخدام حل المعادلات من الدرجة الثانية

طريقة التحليل : طريقة بسيطة ولكن يجب إعداد المعادلة أولا بالتخلص من الكسور والأقواس إن وجدت وإعادة الترتيب بحيث تأخذ المعادلة الصورة التى سبق الإشارة إليها ثم يتم التحليل

- طريقة التحليل

١) طريقة التحليل

قواعد طريقة التحليل

اذا كانت اشارة الحد الاخير موجبة

اشارتى العددين متشابهتين

- يأخذ العددين اشارة موجبة
- يأخذ العددين اشارة سالبة

اذا كانت اشارة الحد الاخير سالبة

اشارتى العددين مختلفتين

يكون احد العددين موجب والاخر سالب والعدد الاكبر يحمل اشارة حد الوسط

- **اذا كانت اشارة الحد الاخير سالبة :**
- **يكون احد العددين موجب والاخر سالب**

والعدد الاكبر يحمل اشارة حد الوسط

- **مثال ١ ــ ٢٠ / ص ٣٧**

باستخدام التحليل

اوجدي جذري المعادلة التالية

س^{٢} - س - ١٢ = صفر

(س +٣) (س - ٤) = صفر

س + ٣ = صفر | س - ٤ = صفر

س = -٣ | س = ٤

جذري المعادلة ، -٣، ٤

الحد الاخير	الحد الاول	حد الوسط
٣ × -٤	س × س	٣س + -٤س = - س

س+٣

س-٤

- اذا كانت اشارة الحد الاخير موجبة :يأخذ العددين اشارة حد الوسط:

✓ اذا كانت حد الوسط موجبة : (اشارة العددين موجبة)

✓ اذا كانت حد الوسط سالبة :(اشارة العددين سالبة)

- مثال ١ _ ٢٠ / ص ٣٩

س^{٢} - ٨ س + ١٥ = صفر

(س -٣) (س - ٥) = صفر

س - ٣ = صفر   س - ٥ = صفر

س = ٣ | س = ٥

جذري المعادلة ، ٣، ٥

الحد الاخير	الحد الاول	حد الوسط
-٣ × -٥	س × س	+
	س-٣	-٣س
	س-٥	-٥س
		-٨س

• اذا كانت اشارة الحد الاخير موجبة :يأخذ العددين اشارة حد الوسط:

✓ اذا كانت حد الوسط موجبة : (اشارة العددين موجبة)

✓ اذا كانت حد الوسط سالبة :(اشارة العددين سالبة)

الحد الاخير	الحد الاول	حد الوسط
×	×	+

س+٧ س ٧س

س+٢ س ٢س

٢

• مثال ١ ـ ٢١ / صـ ٣٩

$$س^{٢} + ٩ س + ١٤ = صفر$$

$$(س +٧) (س + ٢) = صفر$$

س + ٧ = صفر | س + ٢ = صفر

س = -٧ | س = -٢

جذري المعادلة ، -٧، -٢

استخدام القانون فى حل المعادلة

- $س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢ أ}$

حيث :

$أ =$ معامل $س^{٢}$

ب= معامل س

ج= الحد الثابت

- باستخدام القانون

٢)استخدام القانون

مثال(١-٢٥) ص ٤٤

$$\text{٢ س}^{\text{٢}} + \text{٥ س} - \text{٣} = \text{صفر}$$

أ = ٢ / ب = ٥ / ج = - ٣

بالتعويض

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{\text{٢}} - \text{٤أجـ}}}{\text{٢أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-(\text{٥}) \pm \sqrt{(\text{٥})^{\text{٢}} - \text{٤}(\text{٢})(-\text{٣})}}{\text{٢}(\text{٢})}$$

$$\text{س} = \frac{-(\text{٥}) \pm \sqrt{\text{٢٥} + \text{٢٤}}}{\text{٤}}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{٥} \pm \sqrt{\text{٤٩}}}{\text{٤}}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{٥} \pm \text{٧}}{\text{٤}}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{٥} + \text{٧}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢}}{\text{٤}}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{٥} - \text{٧}}{\text{٤}} = -\frac{\text{١٢}}{\text{٤}} = -\text{٣}$$

أي ان مجموعة حل المعادلة (جذري المعادلة): $\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ ، } -\text{٣} \right)$

مثال (١-٢٦) : صـ ٤٥

$$٣\,\text{س}^{٢} - ٧\,\text{س} - ٦ = \text{صفر}$$

أ = ٣ / ب = -٧ / ج = - ٦

بالتعويض

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-(-٧) \pm \sqrt{(-٧)^{٢} - ٤(٣)(-٦)}}{٢(٣)}$$

$$\text{س} = \frac{-(-٧) \pm \sqrt{٤٩ + ٧٢}}{٦}$$

$$\text{س} = \frac{٧ \pm \sqrt{١٢١}}{٦}$$

$$\text{س} = \frac{٧ \pm ١١}{٦}$$

$$\text{س} = \frac{٧ + ١١}{٦} = ٣$$

$$\text{س} = \frac{٧ - ١١}{٦} = -\frac{٢}{٣}$$

أي ان مجموعة حل المعادلة (جذري المعادلة): $\{٣،\ -\frac{٢}{٣}\}$

الدوال الاقتصادية والدالة التربيعية

- كتطبيق عملي للدوال التربيعية نتناول فيما يلي بالدراسة والتحليل تطبيقات اقتصادية وإدارية على الدوال الخطية .

(١) منحنيات تحويل المنتج :

منحنى تحويل المنتج هو المنحنى الواصل بين النقاط المختلفة التي تمثل كل منها أقصى ما يمكن إنتاجه من سلعتين مختلفتين باستخدام كمية معينة من المدخلات ، ولا يكون الإنتاج إلا على نفس المنحنى ومن هنا نستنتج أنه لا يمكن زيادة الكمية المنتجة من إحدى السلعتين إلا بتخفيض الكمية المنتجة من السلعة الأخرى . كما أنه يفترض لأسباب اقتصادية أن منحنى تحويل المنتج يكون محدبًا من الأسفل

تطبيقات على المعادلة من الدرجة الثانية

مثال ١ـ ٢٨ صفحة ٤٨

مثال ١ـ ٢٨ صفحة ٤٨

- في سوق احدي السلع بفرض ان عدد الوحدات المنتجة والمباعة من تلك السلعة في الاسبوع (س مليون وحدة) وكان سعر الوحدة هو ث بحيث : ث = ٢ ــ س /

وتبين ان التكاليف الكلية اللازمة لإنتاج س مليون وحدة في الاسبوع كما يلي :
ت = (٠,٣ + ٠,٥ س) مليون ريال

أوجدى:

١)دالة الإيراد الكلي (ي)

٢) دالة الربح .

٣) كمية الانتاج (س) التي بها يمكن تحقيق ربح اسبوعي قدرة ٠.٢٠ مليون ريال

٤) ماهو السعر (ث) الذي يحقق ربح اسبوعي قدره ٠.٢٠ م ريال

ث = ٢ ـ س / ك= س مليون وحدة   ت/ = (٣, ٠ + ٥, ٠ س)
م.ريال

١)دالة الإيراد (ى) = السعر x الكمية

= (٢ ـ س) س = ٢ س ـ س٢

٢)الربح = الإيراد الكلي ـ التكلفة

- الربح ر = ٢ س ـ س٢ - [٣, ٠ + ٥, ٠ س]
- = ٢س ـ س٢ ـ ٣, ٠ - ٥, ٠ س
- ر = ـ س٢ +٥, ١ س ـ ٣, ٠

٣) لإيجاد كمية الانتاج (س) التي بها يمكن تحقيق ربح اسبوعي قدرة ٠.٢٠ مليون ريال ، يتم التعويض في دالة الربح السابقة عن (ر = ٠.٢٠) وعلي ذلك فإن :

ر = ـ س٢ + ١,٥ س ـ ٣,٠

٠.٢٠ = ـ س٢ + ١,٥ س ـ ٣,٠

٠.٢٠ + س٢ ـ ١,٥ س + ٣,٠ = ٠

= س٢ ـ ١,٥ س + ٠.٥

تابع حل مثال (١-٢٨) : صـ ٤٨

= س٢ - ١,٥ س +٠.٥

أ = ١ / ب =- ١,٥ / ج = ٠.٥

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-(-١,٥) \pm \sqrt{(-١,٥)^{٢} - ٤(١)(٠.٥)}}{٢(١)}$$

$$\text{س} = \frac{١,٥ \pm \sqrt{٢.٢٥ - ٢}}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{١,٥ \pm ٠.٢٥}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{١,٥ \pm ٠.٥}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{١,٥ + ٠.٥}{٢} = ١$$

$$\text{س} = \frac{١,٥ - ٠.٥}{٢} = \frac{١}{٢}$$

أي ان مجموعة حل المعادلة (جذري المعادلة): {١، ١/٢ } أي تحقيق ربح قدرة ٠.٢٠ يمكن تحقيقة من خلال انتاج مليون أو نصف مليون وحدة

- ٤) ماهو السعر (ث) الذي يحقق ربح اسبوعي قدره ٠.٢٠ م ريال
- سعر بيع الوحدة = ث = ٢-س
- وبالتالي :
- أذا كنت س=١ ث= ٢-١= ١
- أي يمكن تحديد السعر بريال واحد للوحدة وبالتالي يمكن بيع مليون وحدة اسبوعياً
- أذا كنت س= ٠.٥٠ ث= ٢- ٠.٥٠ = ١.٥
- أي يمكن تحديد السعر ١.٥ ريال واحد للوحدة وبالتالي يمكن بيع نصف مليون وحدة اسبوعياً

منحنيات تحويل المنتج

- يمثل المنحنى أقصى ما يمكن للمنتج إنتاجه من سلعتين مختلفتين بافتراض أنه يستخدم كمية معينة من المدخلات، إذا أراد زيادة إنتاج إحدى السلعتين لابد وأن يخفض إنتاجه من السلعة الأخرى . (وهو مايعرف ايضا بمنحنيات إمكانيات الإنتاج)

مثال ١ - ٣٠ / ص ٥٢

- مصنع بمدينة جدة ينتج كميات س،ص بآلاف الوحدات من سلعتين مختلفتين باستخدام نفس خطوات وطريقة الإنتاج وفقاً للمعادلة التالية الممثلة لمنحني امكانيات الإنتاج

$$ص^{٢} + س + ٨ص - ٢٠ = ٠$$

المطلوب تحديد أقصي كميات يمكن إنتاجها من كل سلعة؟

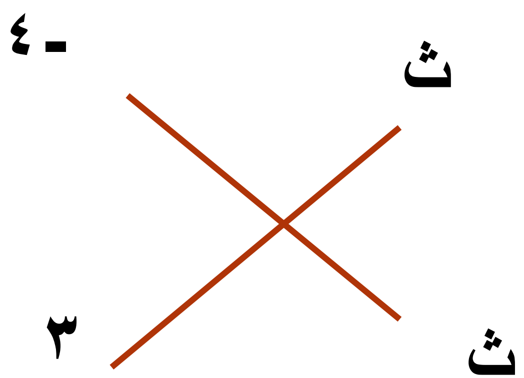
اولاَ: بفرض ان المصنع يريد ان ينتج السلعة س فقط

- لإيجاد أقصى إنتاج من س يتم التعويض فى المعادلة عن ص= صفر
- ص^{٢} + س + ٨ص ـ ٢٠ =٠
- بالتعويض ص=٠
- ٠+ س + ٠ ـ ٢٠ = ٠
- ستكون س = ٢٠ ألف وحدة = ٢٠٠٠٠ وحدة
- للحصول على أقصى إنتاج من ص يتم التعويض عن س = صفر فى المعادلة وستكون لدينا معادلة من الدرجة الثانية يمكن حلها بالقانون وستكون ص = ٢٠٠٠ وحدة

توازن السوق

- مثال / ١ـ٢ـ٣ ص ٥٥
- دالة العرض : ض = ث^{٢} + ث ـ ٣
- دالة الطلب : ط = ٣ ث^{٢} ـ ث ـ ٢٧
- أوجدى السعر بمئات الريالات والكمية التوازنية بآلاف الأجهزة التى تحقق التوازن
- ط = ض (عند التوازن)
- ٣ث^{٢} ـ ث ـ ٢٧ = ث^{٢} + ث ـ ٣

- ط = ض (عند التوازن)
- ٣ث^{٢} – ث – ٢٧ = ث^{٢} + ث – ٣
- ٣ث^{٢} – ث – ٢٧ –(ث^{٢} + ث – ٣)
- ٣ث^{٢} – ث – ٢٧ – ث^{٢} - ث + ٣
- ٣ث^{٢} –ث^{٢} – ث – ث – ٢٧ + ٣
- ٢ث^{٢} – ٢ث – ٢٤ = صفر
- ث^{٢} – ث – ١٢ = صفر
- الحل (ث – ٤) (ث + ٣) = صفر
- ث = ٤ ث = -٣
- ث = ٤ مائة ريال



تابع المثال

- إيجاد (الكمية التوازنية) بالتعويض في:
- أما كمية التوازن يتم التعويض عن السعر = ٤ فى دالة العرض مثلا أو دالة الطلب
- فى دالة العرض : الكمية = $(٤)^{٢}$ + ٤ ـ ٣ =
- = ١٦ + ٤ ـ٣ = ١٧ ألف جهاز
- فى دالة الطلب : الكمية = ٣ × $(٤)^{٢}$ ـ ٤ ـ ٢٧ = ٤٨ ـ ٤ ـ ٢٧ = ١٧ ألف جهاز

- مع تمنياتي بالنجاح

٣

الدوال الأسية اللوغاريتمية

الدوال الأسية اللوغاريتمية

الدوال الأسية اللوغاريتمية

الاسبوع الاول

الدوال وتطبيقاتها

الدوال الأسيه

Exponential Function

الدالة الأسية :

إذا كان أ عدداً حقيقياً موجباً وكان أ $\neq$ 1 فإن الدالة :

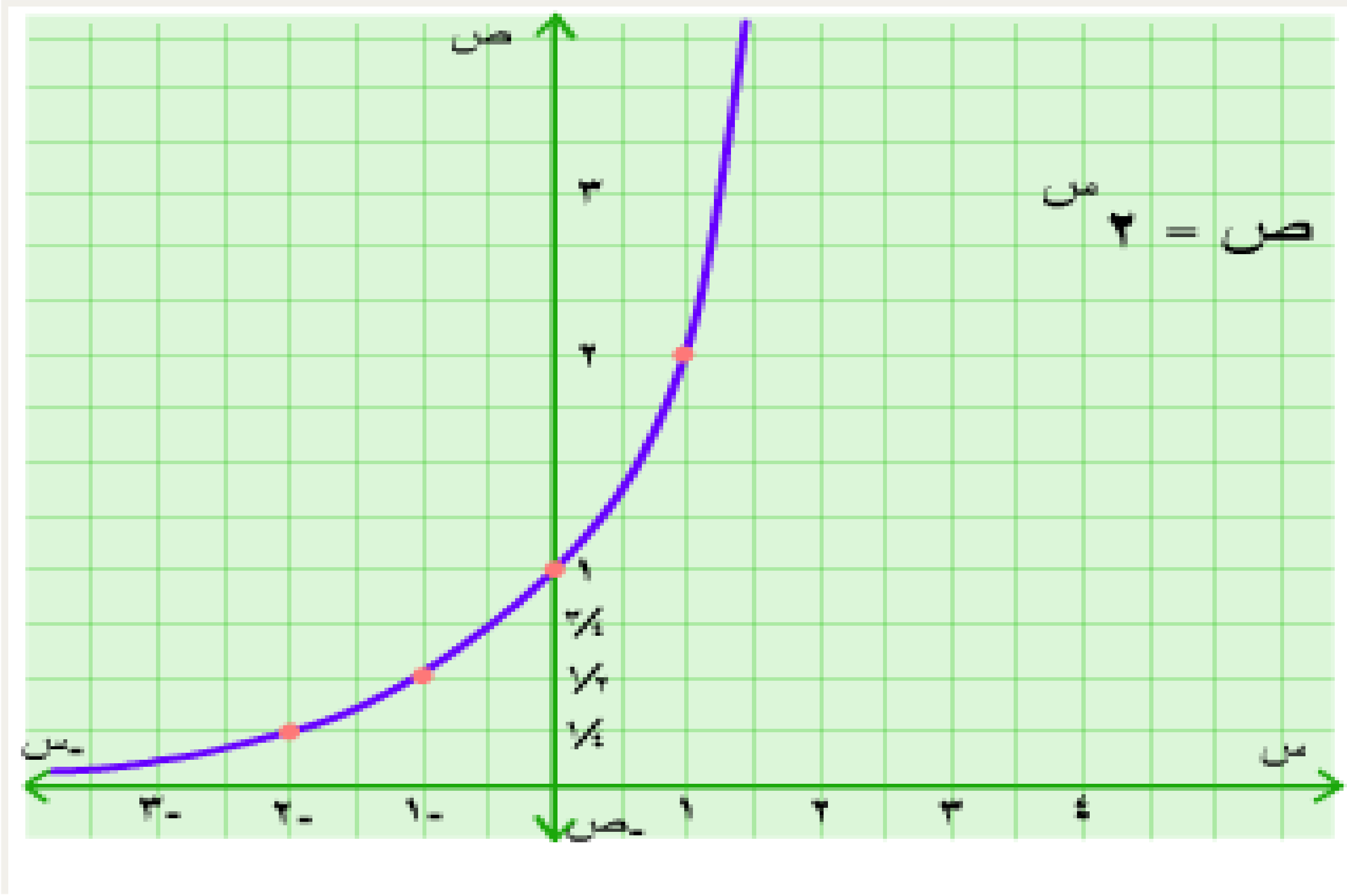
$$ص = أ^{س}$$

تُسمى دالة أسية ، أساسها العدد أ

والدالة الأسية هي الدالة التي يظهر فيها المتغير المستقل في صورة قوة (أو أس) والمقدار الثابت هو الأساس .

فإذا كانت ن رقم صحيح موجب فإن $س^{ن}$
يتم قراءتها(س أس ن) وهي تعبر عن س مضروبة في نفسها ن من المرات ، أي أن :

$$س^{ن} = س \times س \times س \times ...... \times س$$
(لعدد ن من المرات)



ص = ٢^س
ص
س
ص-
س-
٣
٢
١
¾
½
¼
٣-
٢-
١-
١
٢
٣
٤

أهمية الدالة الاسيه

- تعتبر الدالة الاسية من أهم الدوال المستخدمة في الجوانب المالية وخاصة في الحسابات البنكية ،
- وتستخدم ايضا في دراسات النمو ، ويطلق عليها دوال النمو

مكونات الدالة الاسية

الأس الثابت

- ص = أ ^{س}

الأساس متغير

- **<u>أشهر صورة للدالة الأسية</u>**
- ص = هـ ^{س}
- حيث هـ = e = ٢,٧١٨ ، تمثل الأساس للمنحني اللوغاريتمي الطبيعي Natural Logarithm

مراجعة بعض قوانين للدالة الأسية

- ١) $\text{س}^{\text{م}} \times \text{س}^{\text{ن}} \times \text{س}^{\text{هـ}} = \text{س}^{\text{م}+\text{ن}+\text{هـ}}$
- $٣^{٢} \times ٣^{٣} = ٣^{٢+٣} = ٣^{٥} = ٢٤٣$
- ٢) $\text{س}^{\text{م}+\text{ن}+\text{هـ}} = \text{س}^{\text{م}} \times \text{س}^{\text{ن}} \times \text{س}^{\text{هـ}}$

$٢٤٣ = ٣^{٥} = ٣^{٢} \times ٣^{٣}$

- ٣) $\dfrac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{\text{م}-\text{ن}}$
- $\dfrac{٢^{٧}}{٢^{٢}} = ٢^{٧-٢} = ٢^{٥} = ٣٢$
- $\dfrac{٢^{٧}}{٢^{٢}} = ٢^{٧-٢} = ٢^{٥} = ٣٢$

• ٦) $\frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\text{م} - \text{م}} = ١$

$= \text{س}^{\text{صفر}} = ١$

• $\frac{٨^{٣}}{٨^{٣}} = ٨^{٣ - ٣} = ٨^{\text{صفر}} = ١$

$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{م}} = \frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{ب}^{\text{م}}}$

$\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٣^{٢}}{٥^{٢}}$

• ٧) $(\text{أب})^{\text{س}} = \text{أ}^{\text{س}} \times \text{ب}^{\text{س}}$

$(٢ \times ٣)^{٢} =$

$= ٢^{٢} \times ٣^{٢} =$

$= ٤ \times ٩ = ٣٦$

• ٨) $(\text{س}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{م ن}}$

• $(٣^{٣})^{٢} = ٣^{٣} \times ٣^{٣} = ٣^{٣+٣} = ٣^{٦}$

مثال ۱- ۳۵

المعادلات الأسية

- ص = $\text{أ}^{\text{س}}$

أ رقم موجب أكبر أو أقل من ١ (مقدار ثابت /الاساس)

قواعد الأسس ص / ٦٨ـ٧٠

إذا إتفقت الأساسات فإن : الأس =الأس

$٣^{\text{س}-١} = ٣^{٣}$ ← س-١ = ٣ ← س = ٤

إذا اتفقت الأسس فإن : الأساس= الأساس

$(٢\text{س} + ١)^{٣} = ٢٧$

$(٢\text{س} + ١)^{٣} = ٣^{٣}$ ← $(٢\text{س} + ١) = ٣$ ← ٢س = ٣-١ ← س = $\frac{٢}{٢}$ = ١

إذا اتفقت الأسس وكان الأساس≠ الأساس فإن الأس = صفر

حل المعادلات الأسية

قواعد حل المعادلات الاسية :

١ ـ إذا كان الأساس = الأساس فإن : الأس= الأس

- مثال (١ـ٤١) ص ٦٩
- موظف يحصل على س ألف ريال كراتب شهرى ، اوجدى الراتب الشهري إذا كان يتحدد بالمعادلة التالية :

$$٢٥^{س+١} = ١٢٥^{س-٥}$$

$٢٥^{\text{س+١}} = (١٢٥)^{\text{٢س-٥}}$

$(٥^{٢})^{\text{س+١}} = (٥^{٣})^{\text{٢س-٥}}$

$(٥)^{\text{٢س+٢}} = (٥)^{\text{٦س-١٥}}$

٢س+٢ = ٦س-١٥ ← = ٦س-٢س-٢-١٥

= ٤س- ١٧ ← ٤س= ١٧ ← س= $\frac{١٧}{٤}$

الراتب الشهري = س× $\frac{١٧}{٤}$

الراتب الشهري = ١٠٠٠× $\frac{١٧}{٤}$ = ٤٢٥٠ ريال

٢- إذا اتفقت الاسس فإن الأساس= الأساس

مثال (١-٢-٤) ص ٦٩

إذا تم تحديد الراتب الشهري الثابت لأحد مندوبي البيع بإحدي المؤسسات التجاريةبجده يعادل (س)ألف ريال ، أوجد الراتب إذ تحدد المتغير(س) وفقاً للدالة الأسية :

(س-٤)^{٧} = (١٢٨)

(س-٤)^{٧} = (٢)^{٧}

(س-٤) = (٢)

س=٤+٢ ← س=٦

الراتب الشهري = س×١٠٠٠=

الراتب الشهري = ٦×١٠٠٠=٦٠٠٠

٣ـ إذا اتفقت الأسس وكان الأساس≠ الأساس فإن الأس = صفر

مثال (١ـ٣٤) ص ٧٠:

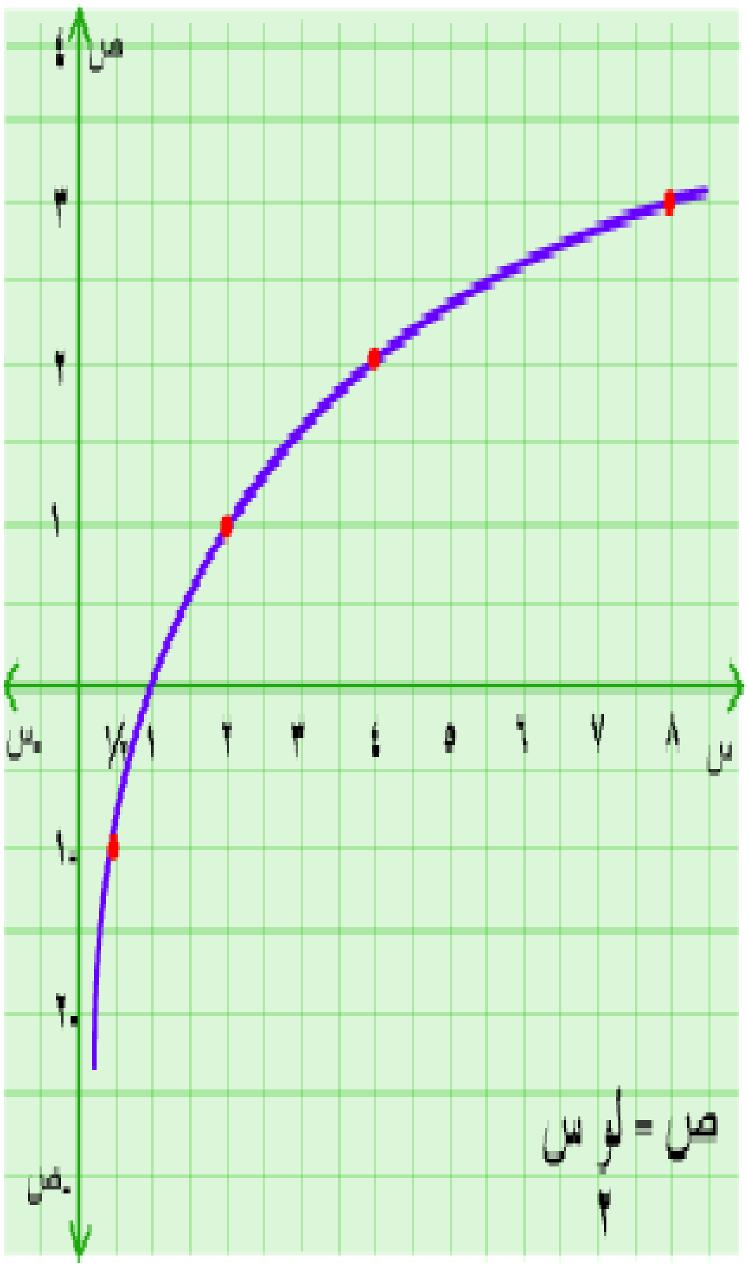
- إذا تم تقدير صافي الربح الشهري لمؤسسة تجارية بجدة بأنه يعادل (س) ألف ريال ، أوجد صافي الربح إذا تحدد المتغير (س) وفقاً لدالة أسية علي النحو التالي:
- $٨^{\text{٣س-٧٥}} = (٥)^{\text{٣س-٧٥}}$

الاجابة

- $٨^{\text{٣س-٧٥}} = (٥)^{\text{٣س-٧٥}}$
- حيث أن الأس = الأس ، ولكن الأساس لايساوي الأساس
- الآس = صفر
- ٣س = ٧٥
- س = ٢٥
- صافي الربح = س×١٠٠٠ = ٢٥ ×١٠٠٠= ٢٥٠٠٠ ريال

الدوال الأسية

الدوال اللوغاريتمية



تعريف الدالة اللوغاريتمية

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها أ (أ > صفر ، أ ≠ 1) هي الدالة المعرفة على فئة الأعداد الموجبة كما يلي :

$$د\,(س) = لو_{أ}\, س$$

ومن الواضح أن هذه العلاقة مرتبطة ارتباطاً قوياً بالدالة الأسية التي أسسها (أ)

حيث أن : $ص = لو_{أ}\, س$ مكافئة للعلاقة : $س = أ^{ص}$

ومن هنا فإن الدالة اللوغاريتمية التي أساسها (أ) هي عكس الدالة الأسية التي أساسها (أ) . وعليه فإن الدوال الأسية مرتبطة ارتباطا قوياً بدراسة الدوال اللوغاريتمية وهناك عدد غير نسبي يرمز لـه بالرمز هـ وقيمتـه التقريبية هـ = 2.718281828 وهو هام جداً عند استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية . وأهمية العدد هـ لهذه الدوال كأهمية النسبة الثابتة ط بالنسبة للدوال المثلثة .

والدالة اللوغريثمية هي الدالة التي يتحدد فيها المتغير التابع (ص) بلوغاريتم دالة في المتغير المستقل (س)

الدالة اللوغاريتمية

- شكل الدالة : الدالة اللوغاريتمية هو اس اساس العدد
- ص = س^{أ} (صورة اسية)

لو$_{س}$ص = أ (صورة لوغاريتمية , لوغاريتم العدد ص للأساس س =أ

مثال :

٧ = ٥^{س}

لو$_{٥}$ ٧ = س   لوغاريتم العدد ٧ للأساس ٥ =س

مثال

١٢٨ = ٢^{٧}

لو$_{٢}$ ١٢٨ = ٧   لوغاريتم العدد ١٢٨ للأساس ٢ =٧

حولي الصيغة اللوغاريتمية الي الصيغة الاسية

- لو$_{٥}$ ٩ = س

لوغاريتم العدد ٩ للأساس ٥ = س (الاس)

لو$_{٥}$ ٩ = س

٩ = ٥^{س}

- لو$_{٣}$ ١٥ = ١٢

لوغاريتم العدد ١٥ للأساس ٣ = ١٢

لو$_{٣}$ ١٥ = ١٢

١٥ = ٣^{١٢}

القواعد من ١ - ٨ ص ٧٢-٧٣

- ١) لو$_{\text{س}}$(أ × ب × جـ) = لو$_{\text{س}}$ أ + لو$_{\text{س}}$ ب + لو$_{\text{س}}$ جـ
- لو$_{\text{١٠}}$(٣ × ٢ × ٥) = لو$_{\text{١٠}}$ (٣) + لو$_{\text{١٠}}$ (٢) + لو$_{\text{١٠}}$ (٢)

- ٢) لو$_{\text{س}}$ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = لو$_{\text{س}}$ أ - لو$_{\text{س}}$ ب
- لو$_{\text{١٠}}$ $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ = لو$_{\text{١٠}}$ (٣) - لو$_{\text{١٠}}$ (٥)

- ٣) لو$_{\text{س}}$(ب)$^{\text{ن}}$ = ن لو$_{\text{س}}$ (ب)
- لو$_{\text{هـ}}$ (٣)$^{\text{٢}}$ = ٢ لو$_{\text{هـ}}$ (٣)

تابع قواعد اللوغاريتم

- ٤) ن $\text{لو}_{\text{س}}$ (ب) = $\text{لو}_{\text{س}}$(ب)$^{\text{ن}}$

  ٦ $\text{لو}_{٢}$ (٩) = $\text{لو}_{٢}$(٩)^{٦}

- ٥) $\text{لو}_{\text{س}}$ ١ = صفر

- ٦) $\text{لو}_{\text{أ}}$ أ = ١

  $\text{لو}_{١٠}$ ١٠ = ١

إيجاد عناصر المعادلة اللوغاريتمية

- تتمثل عناصر الدالة اللوغاريتمية في ثلاث عناصر ، وقد يكون أحد تلك العناصر مجهول وهي:
  - ❖ اللوغاريتم
  - ❖ أو العدد
  - ❖ أو أساس اللوغاريتم

  ومن الناحية الرياضية ، يمكن حساب أحد عناصر المعادلة اللوغاريتمية بمعلومية بقية العناصر

(اولا: ايجاد العدد بمعلومية الأساس واللوغاريتم)

مثال: ١-٤٤ ص ٧٤

إذا كانت مدخرات أحد المواطنين يعادل س الف ريال بأحد البنوك ، أوجدي مدخرات ذلك الشخص إذا تحددت قيمة س وفقاً للمعادلة اللوغاريتمية التالية لو$_{٢}$ س = ٧

- **الاجابة**
- **مدخرات شخص س تتحدد بالمعادلة :**
- لو$_{٢}$ س = ٧ لوغاريتم العدد س للأساس ٢ يساوي ٧
- س= $٢^{٧}$
- س= ١٢٨
- مدخرات الشخص بالبنك =س×١٠٠٠=
- ١٢٨×١٠٠٠=١٢٨٠٠٠
- مدخرات هذا الشخص س=١٢٨الف

(ثانياً :إيجاد الأساس بمعلومية العدد واللوغاريتم)

مثال: ١ـ٥٤ ص ٧٤

إذا تم تحديد الراتب الشهري لأحد مندوبي البيع بإحدي المؤسسات التجاري بجدة بأنه يعادل س الف ريال ، اوجد راتب ذلك الشخص أذا تحدد المتغير س وفقاً للدالة اللوغاريتمية التالية : لو$_{س}$ ٦٢٥ = ٤

- **الاجابة**
- نوجد س بحل المعادلة اللوغاريتمية السابقة :
- لو$_{س}$ ٦٢٥ = ٤ بتحويلها للصورة الأسية
- ٦٤٥ = س^{٤}
- ٥^{٤} = س^{٤}
- س = ٥ لأن الأسس متساوية
- الراتب الشهري للمندوب = س×١٠٠٠=
- = ٥ × ١٠٠٠=٥٠٠٠ ريال

مثال : إذا كانت مدخرات أحد المواطنين يعادل س الف ريال بأحد البنوك ، أوجدي مدخرات ذلك الشخص إذا تحددت قيمة س وفقاً للمعادلة اللوغاريتمية التالية $\text{لو}_{\text{س}}$ ١٢٥ = ٢/٣

- $\text{لو}_{\text{س}}$ ١٢٥ = ٢/٣
- ١٢٥ = $\text{س}^{٢/٣}$
- $\text{س}^{٢/٣}$ = ١٢٥
- $\text{س}^{٢/٣}$ = $٥^{٣}$
- $(\text{س}^{٢/٣})^{(٢/٣)}$ = $(٥^{٣})^{(٢/٣)}$
- س= $٥^{٢}$ × ١٠٠٠ = ٢٥ × ١٠٠٠ = ٢٥٠٠٠

(ثالثاً:ايجاد اللوغاريتم بمعلومية العدد و الأساس)

- مثال (١-٦٤) ص ٧٥

إذا تم تحديد المصروف الشهري الثابت لأحد طلاب كلية الإقتصاد والإدارة بأنه يعادل (س) الف ريال ، أوجد مصروف ذلك الطالب إذا تحدد المتغير (س) وفقاً للدالة اللوغاريتمية التالية : $لو_{٧}$ ٣٤٣ = س

- **الاجابة**
- **مصروف طالب س ألف ريال يتحدد بالمعادلة**
- $لو_{٧}$ ٣٤٣ = س   لوغاريتم العدد ٣٤٣ للأساس ٧ = س
- **بتحويلها إلي الصورة الأسية**
- ٣٤٣ = $٧^{س}$ **وبالتحليل ينتج أن:**
- $٧^{٣}$ = $٧^{س}$ **س=٣**
- **المصروف الشهري للطالب = س×١٠٠٠=٣×١٠٠٠=٣٠٠٠**

س= ٣ الف ريال

تطبيقات على الدوال الأسية اللوغاريتمية ص ٧٦

- استهلاك الأصول الثابتة
- تكلفة شراء الأصل الثابت فى تاريخ الشراء هى ك
- معدل استهلاك الأصل من قيمته الدفترية فى نهاية كل عام هو هـ
- القيمة الدفترية للأصل فى بداية السنة ن ($ق_{ن}$)

$$ق_{ن} = ك \, (١ - هـ)^{ن - ١}$$

القيمة الدفترية للأصل فى بداية السنة ن

تكلفة شراء الأصل الثابت فى تاريخ الشراء

معدل استهلاك الأصل من قيمته الدفترية فى نهاية كل عام

مثال (١-٤٧) ص ٧٦

- **آلة قيمتها وقت الشراء ٥٠٠٠٠ ريال وتستهلك بطريقة القسط المتناقص بواقع ٨ % من قيمتها أول كل سنة ، ما هى قيمة الآلة فى أول السنة السادسة**

الحل : تكلفة شراء الأصل = ق= ٥٠٠٠٠ ريال ،

معدل الاستهلاك = هـ = ٨% = ٠,٠٨ ، ن= ٦

- **قيمة الآله في بداية السنة (ن) = $ق_{ن}$ = ك(١-هـ)$^{ن-١}$**
- **ق $_{٦}$ = ٥٠٠٠٠ (١ – ٠,٠٨)$^{٦-١}$**
- **ق $_{٦}$ = ٥٠٠٠٠(٠.٩٢)^{٥}**
- **= ٥٠٠٠٠× ٠.٦٥٩١ =٣٢٩٥٤ ريال**

تطبيقات على الدوال الأسية اللوغاريتمية ص٧٨

- **تقدير عدد السكان :**
- س عدد السكان فى سنة الأساس
- ز معدل نمو السكان الثابت
- ن البعد الزمنى بين السنة المراد تقدير السكان فيها و سنة الأساس
- $ص_ن$ عدد السكان بعد ن من السنوات
- $ص_ن = س (١ + ز)^ن$

$$ز = \left(\frac{ص_ن}{س} \right)^{1/ن} - 1$$

- مثال (١-٩٤) ص ٧٩ :
- بفرض أن السكان في إحدي الدول يتزايدون بمعدل سنوي ٤% وان عدد السكان يساوي ٥٠ مليون نسمة في عام ١٤٢٥ والمطلوب تقدير عدد السكان في عام ١٤٣٥ هـ
- الحل:
- س= ٥٠ مليون ، ز= ٤% سنوياً ، ن= ١٤٣٥-١٤٢٥=١٠سنة
- $ص_{ن} = س (١ + ز)^{ن}$
- عدد السكان في سنة ١٤٣٥ = ٥٠(١+ ٠,٠٤)^{١٠}
- = ٥٠ × ١,٤٨٠٢٤٤=٧٤ مليون نسمة تقريباً

مثال(١ـ٥٠) ص٧٩

- يتزايد السكان فى منطقة ما بمعدل ثابت ، فإذا كان عدد عام ١٤١٥ يساوى ٤٤ مليون نسمة ، ثم وصل عدد السكان عام ١٤٢٥ إلى ٦٤ مليون نسمة .
- المطلوب :

١. معدل نمو السكان (معدل الزيادة السنوية للسكان)
٢. عدد السكان عام ١٤٣٥

الحل :

$$ز = \frac{ص_ن}{س}^{\,١/ن} - ١ =$$

الحل: معدل الزيادة السنوية للسكان

$$ز = \left(\frac{ص_ن}{س}\right)^{١/ن} - ١ =$$

س= ٤٤ مليون نسمة

$ص_ن = ص_{١٠} = ٦٤$ مليون نسمة

ن = ١٤٢٥ ـ ١٤١٥ =١٠ سنوات

$١/١٠ = ٠.١$

$$ز = \left(\frac{٦٤}{٤٤}\right)^{٠.١} - ١ = ١.٠٣٨ - ١ = ٣,٨ \%$$

- باستخدام القانون معدل نمو السكان = ٣,٨ %
- تقدير عدد السكان عام ١٤٣٥ باعتبار أن سنة الأساس ١٤١٥
  ستكون ن = ١٤٣٥ ـ ١٤١٥ = ٢٠
- $ص_{٢٠} = ٤٤ (١ + ٠,٠٣٨)^{٢٠} = ٩٢,٧٧$ مليون نسمة

قانون باريتو لتوزيع الدخل

- اقترح باريتو القانون التالى لتوزيع الدخل :

$$ن = \frac{أ}{ل^{ب}}$$

- ن عدد الأشخاص الذين يزيد دخل كل منهم عن مستوى دخل معين ل
- أ عدد السكان
- ب معامل سكانى عادة = (٢/٣) = ١,٥

مثال (١-١٥) ص٨١

- إذا كان قانون باريتو لتوزيع دخل مجموعة معينة هو :

$$ن = \frac{٢١٦ \times ١٠^{١٠}}{ل^{٣/٢}}$$

١)فما هو عدد المليونيرات ؟

٢) ما هو اقل دخل بين اغني ٨٠ فرد في هذا المجتمع

فما هو عدد المليونيرات

عدد المليونيرات = $\frac{٢١٦ \times ١٠^{١٠}}{١٠٠٠٠٠٠^{(٢/٣)}} = \frac{٢١٦ \times ١٠^{١٠}}{{١٠^{٦}}^{(٢/٣)}}$

عدد المليونيرات = $\frac{٢١٦ \times ١٠^{١٠}}{١٠^{٩}} =$ ٢١٦٠ مليونيرا

اقل دخل بين أغنى ٨٠ فرد فى المجتمع

$$ن = \frac{٢١٦ \times ١٠^{١٠}}{ل^{(٣/٢)}} =$$

$$ل^{(٣/٢)} = \frac{٢١٦ \times ١٠^{١٠}}{٨٠} = (٢,٧ \times ١٠^{١٠})$$

$$ل^{(٣/٢)(٢/٣)} = (٢٧ \times ١٠^{٩})^{(٢/٣)} = (٣^{٣} \times ١٠^{٩})^{(٢/٣)} =$$

$$ل = ٣^{٣(٢/٣)} \times ١٠^{٩(٢/٣)}$$

$$ل = ٩ \times ١٠^{٦} = ٩ \text{ مليون}$$

أي ان اقل دخل بين اغني ٨٠ فرد في هذا المجتمع هو ٩ مليون ريال

- **تمهيد**

- $ل^{١/٤} = ٤$

- $س^{١/٤} = ٢^٢$

- $س^{١/٤\,(٤/١)} = ٢^{٢\,(٤/١)}$

- $س = ٢^٢$

إذا كانت مدخرات أحد المواطنين يعادل س الف ريال بأحد البنوك ، أوجدي مدخرات ذلك الشخص إذا تحددت قيمة س وفقاً للمعادلة اللوغاريتمية التالية لو$_{س}$ ١٢٥ = ٣/٢

- **لو$_{س}$ ١٢٥ = ٣/٢**
-
- ١٢٥ = س$^{٣/٢}$
- س$^{٣/٢}$ = ١٢٥
- س$^{٣/٢}$ = ٥^{٣}
- س$^{٣/٢}$(٢/٣) = ٥^{٣} (٢/٣)
- س = ٢٥ × ١٠٠٠ = ٢٥٠٠٠

مع اطيب تمنياتي

٤

الفصل الثاني

حل المعادلات الخطية
في متغير واحد وفى متغيرين

حل المعادلات في متغير واحد

- مثال ٢ ـ ٢ صفحة 91
- تكلفة إنتاج الوحدة من منتج معين بالريال يمكن التعبير عنها بالمعادلة التالية:

٥س ـ ٣ = ٢ س +٩   فما هى تكلفة الوحدة المنتجة س ؟

طرق حل المعادلات الخطية

- المعادلة الرياضية فى متغيرين هو تعبير جبرى يوضح تساوى مقدارين يحتويان على المتغيرين .
- فإذا كان لدينا عدة معادلات جبرية فى نفس المتغيرين فيمكن حلها معا (آنيا) ، وبالتالى الحصول على قيمة المتغيرين التى تحقق المعادلتين معا .
- إحدى طرق الحل التي سنتعرض لتطبيقاتها فى البرمجة الخطية ، هى طريقة الرسم البيانى للخطوط التى تمثل المعادلات . ويتحدد الحل بإيجاد قيم المتغيرين عند نقطة أو نقط التقاطع.

طرق حل المعادلات الخطية

- تتمثل باقى طرق حل المعادلات الخطية فى :

١. طريقة التعويض .
٢. طريقة الحذف .
٣. طريقة المحددات .
٤. طريقة المصفوفات .

طريقة التعويض

- يتم إيجاد قيمة متغير ما بدلالة المتغير الآخر من إحدى المعادلتين ثم يتم إيجاد قيمة المتغير الآخر بالتعويض فى المعادلة الثانية .
- يتم التعويض عن القيمة المتحصل عليها للمتغير الآخر فى أى من المعادلتين للحصول على قيمة المتغير الأول .
- وهكذا يتم الحصول على قيمتى المتغيرين التى تحقق المعادلتين معا.

طريقة التعويض

- **مثال ٢ ـ ٩ صفحة ٩٩**

- **أوجدى كميتى السلعتين (س ، ص) اللتان تحققان دالتى الإنتاج الآتيتين معا :**
- **٢س + ٤ ص = ٢٠ (١)**
- **٥س ـ ١٠ ص = ١٠ (٢)**

الاجابة : ص = ٢ س = ٦

• حل المعادلات الخطية في مجهولين مثال ٢-٩ / التعويض

٢ س + ٤ ص = ٢٠ (١)

٥ س – ١٠ ص = ١٠ (٢)

مرتبة

نعيد ترتيب المعادلة (١) من معادلة (١) نوجد س:

٢ س = ٢٠ – ٤ ص بالقسمة علي رقم ٢

س = ١٠ – ٢ ص (٣)

التعويض في معادلة (٢) بقيمة س في معادلة (٣)

٥س – ١٠ ص = ١٠

٥(١٠ – ٢ص) – ١٠ ص = ١٠

٥٠ – ١٠ ص – ١٠ ص = ١٠

٥٠ – ٢٠ ص = ١٠

٥٠ – ١٠ = ٢٠ ص

٤٠ = ٢٠ ص

٢ = ص

إيجاد س من معادلة (٣):

- س = ١٠ – ٢ ص
- = ١٠ – ٢ × ٢
- س = ٦

طريقة الحذف والإستبعاد

- تعتمد هذه الطريقة على حذف أحد المتغيرين من المعادلات و إيجاد قيمة المتغير الآخر . بالتعويض عن قيمة المتغير الآخر في أي معادلة نحصل على قيمة المتغير الذي حُذف في البداية .

مثال ٢ـ١٠ صفحة / ١٠١

- باستخدام طريقة الحذف أوجدي كميتي الإنتاج س ، ص من سلعتين إذا كان لديك الآتي :

ـ ٣ ص + ٦ س = ٢١٠ (١)

ـ س + ٤ص ـ ٤٢٠ = صفر (٢)

- ٣ ص + ٦ س = ٢١٠ (١)

- س + ٤ ص – ٤٢٠ = صفر (٢)

أ س + ب ص = ل

بناء على الصورة العامة:

٦ س – ٣ ص = ٢١٠ (١)

- س + ٤ ص = ٤٢٠ (٢)

المعادلة (٢) × ٦: / ثم جمع المعادلتين:

٦س – ٣ ص = ٢١٠ (١)

- ٦ س + ٢٤ ص = ٢٥٢٠ (٢)

٢١ ص = ٢٧٣٠

ص= $\frac{٢٧٣٠}{٢١}$ = ١٣٠

التعويض في أي معادلة لإيجاد قيمة س

٦ س – ٣ ص = ٢١٠

٦س– ٣×١٣٠ = ٢١٠

س – ٣٩٠ = ٢١٠

٦س = ٣٩٠ +٢١٠

٦س = ٦٠٠

س = ١٠٠

الاسبوع الثانى

الفصل الثالث

المحددات
وتطبيقاتها الاقتصادية والإدارية

تعريفات هامة

- **المحدد :** مجموعة من العناصر (أعداد أو رموز) موضوعة فى صفوف وأعمدة بين خطين رأسيين

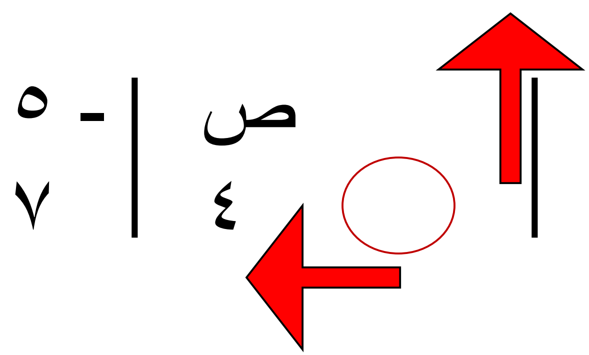
لابد وأن يكون عدد الصفوف = عدد الأعمدة

ص - ٥

٤ ٧

المحيدد : لكل عنصر في أي محدد مهما كانت رتبته محدد اصغر يطلق عليه لفظ المحيدد ، ومحيدد العنصر هو المحدد الآصلي بعد حذف الصف والعمود اللذان بهما هذا العنصر

محيدد العنصر (٧) = ص



محيدد من الرتبة الثالثة

/ ص١١٣ ١٤٣١)

ΔΔΔ

- Δ ٢

٢	٥	٣
س	-٤	٧
-٣	٢	-٢

محيدد العنصر س =

٢

٣

-٣ -

٢

المرافق : لكل عنصر مرافق هو قيمة المحيدد مضروبا فى
– ١ مرفوعا إلى قوة تساوى حاصل جمع ترتيب العنصر فى الصف والعمود

التطبيق على المثالين السابقين .

مثال :

-٢ س

٦ + ٣ -

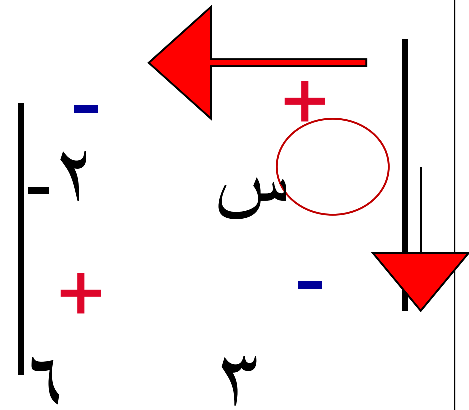
| - + |

إشارات مرافقات العناصر فى المحدد من الرتبة الثانية

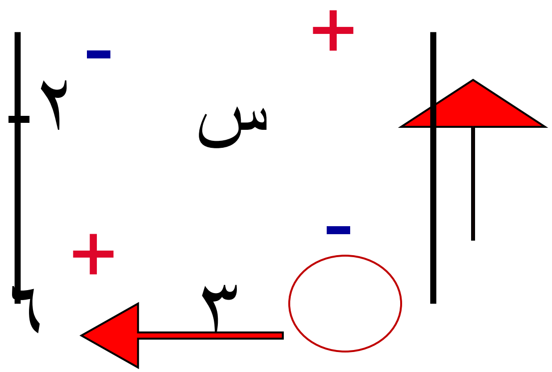
$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}$$

المرافق : لكل عنصر مرافق هو قيمة المحيدد / الخطوات:

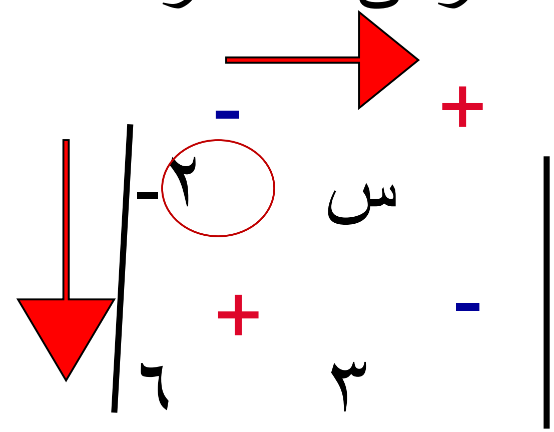
١) وضع إشارات مرافقات العناصر في المحدد من الرتبة الثانية



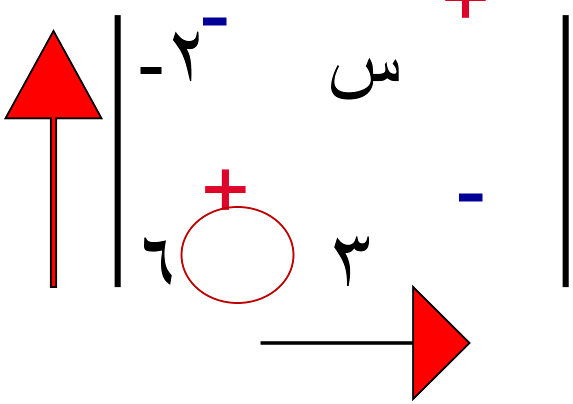
مرافق العنصر -٢ = + | +٣ |



مرافق العنصر ٦ = - | + س |



مرافق العنصر س = - | +٦ |



مرافق العنصر ٣ = + | -٢ |

قيمة المحدد من الدرجة الثالثة(استخدام عناصر أي عمود او صف

(مثال ٣-٣ /ب (١١٨): احسبي قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٢ & -٢ \\ ١ & -١ & ب \end{vmatrix}$$

- (-) ( )

+ (ب)

$$= (-)\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} \quad (+)\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} \quad (-)\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix}$$

مرافق العنصر ١

مرافق العنصر -٢

مرافق العنصر ب

مثال (٣-١/ج) صـ ١١٦

- اوجدي قيمة المحدد
- حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي ــ حصل ضرب عناصر القطر الفرعي

$$\Delta_{ج} = \begin{vmatrix} -٤ & ٢ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix}$$

-

$$\Delta_{ج} = (٢\times٧) - (-٤\times٣) = ٢٦$$

حل المعادلات الخطية في مجهولين(طريقة كرمر Δ

- $\text{أ}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} = \text{ك}_1$
- $\text{أ}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} = \text{ك}_2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{ك}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ك}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ك}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ك}_2 \end{vmatrix}$$

مجهولين

مثال ٣ ـ ١٤ صـ(١٢٩)

أوجدي قيمتي س ، ص من الآتي :

٣ س + ص = ١٧

س – ٢ ص = ـ ٦

- الخطوات
- إيجاد قيمة المحدد
- إيجاد قيمة محدد س
- إيجاد قيمة محدد ص
- قيمة س = Δس/ Δ
- قيمة ص = Δص/ Δ

١٢٩

- ٣س + ص = ١٧
- س - ٢ص = -٦

Δ = محدد المعاملات =

٣	١
١	-٢

Δ = (٣ × -٢) – (١ × ١)

= -٦ - ١ = -٧

Δ س =

١٧	١
-٦	-٢

Δ س = (١٧ × -٢) – (-٦ × ١)

= - ٣٤ + ٦ = -٢٨

Δ ص =

٣	١٧
١	-٦

Δ ص = (٣ × -٦) – (١ × ١٧)

= - ١٨ - ١٧ = -٣٥

Δ = -٧ Δ س= -٢٨ Δ ص= -٣٥

س= -٢٨ = ٤
-٧

• ص = -٣٥ = ٥
-٧

الخطوات

إيجاد قيمة المحدد

إيجاد قيمة محدد س قيمة س = Δس / Δ

إيجاد قيمة محدد ص قيمة ص = Δص / Δ

قيمة المحدد من الدرجة الثالثة(استخدام عناصر أي عمود او صف

مثال ٣-٣ /ب (١١٨): احسبي قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٢ & -٢ \\ ١ & -١ & ب \end{vmatrix}$$

$$\Delta = +(١)\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} - (-٢)\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} + (ب)\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix}$$

= ١ (٢ — (- ٠) [١ - (-١)]+٢ [٠ - (٢)]+ ب

+ ب(٠-٢) = ١٤ [٢(١+١)]= ٢+

= ٢+٤ — ٢ب = ٦ -٢ب

(مثال ٣-٣/أ ١١٨) :احسبي قيمة المحدد

مثال :

أحسب قيم المحدد الأتي : أ =

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 7 \\ 2- & 5- & 2- \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل :

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2- & 5- \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} (2-) - \begin{vmatrix} 2- & 5- \\ 4 & 3 \end{vmatrix} 7 = أ \;\Delta$$

$$(35 + 4 -) + (21 - 8)\ 2 + (6 + 20 -)\ 7 =$$

$$93 - = 31 + 26 - 98 - =$$

المشكلات التطبيقية وحلها

- مثال(٣-١٨) / ص ١٣٥ : مصنع ينتج سلعتين في قسمين
- الوحدة من السلعة الأولى تحتاج إلى ساعتين في القسم الأول وساعتين في الثاني
- الوحدة من السلعة الثانية تحتاج إلى ساعتين في القسم الأول وثلاث ساعات في الثاني
- طاقة تشغيل القسم الأول ٢٠٠ ساعة
- طاقة تشغيل القسم الثاني ٢٥٠ ساعة
- إحسبى عدد الوحدات الممكن إنتاجها من السلعتين بافتراض استخدام طاقة المصنع بالكامل .

السلعة / القسم	الأولي(س)	الثانية(ص)	الطاقة
الاول	٢	٢	٢٠٠
الثاني	٢	٣	٢٥٠

- ٢ س + ٢ ص = ٢٠٠
- ٢ س + ٣ ص = ٢٥٠

ثم يتم حل النظام باستخدام المحددات

Δ = محدد المعاملات = | ٢ ٢ ؛ ٢ ٣ |

Δ = (٢ × ٣) − (٢ × ٢)

= ٦ − ٤ = ٢

Δ س = | ٢٠٠ ٢ ؛ ٢٥٠ ٣ |

Δ س = (٢٠٠ × ٣) − (٢٥٠ × ٢)

= ٦٠٠ − ٥٠٠ = ١٠٠

Δ ص = | ٢ ٢٠٠ ؛ ٢ ٢٥٠ |

Δ ص = (٢ × ٢٥٠) − (٢ × ٢٠٠)

= ٥٠٠ − ٤٠٠ = ١٠٠

س = Δ س / Δ = ١٠٠ / ٢ = ٥٠

ص = Δ ص / Δ = ١٠٠ / ٢ = ٥٠

تمنياتي بالنجاح

تمنياتي بالنجاح

٥

المصفوفات و تطبيقها الاقتصادية والإدارية

الفصل الرابع

٤ ‎-٢

‎- ‎-١

١

تعريف المصفوفة

مجموعة من الأرقام أو العناصر مرتبة في شكل صفوف وأعمدة ، يتم وضعها بين قوسين.

(لا يشترط عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة)

- **أمثلة:**

مصفوفة المستطيلة

٧ ٣ =

٠

٥ ١ ٢ـ

مصفوفة مكونة من صفين وثلاثة أعمدة ، حيث تتكون الصفوف والأعمدة من مجموعة من العناصر ، مع ملاحظة أن عناصر المصفوفة قد تكون أعداد أو رموز ، ويُقال أن المصفوفة السابقة من الرتبة 2 x 3 لأنها تتكون من 2 صف ، 3 عمود

أنواع اخري المصفوفات

- المصفوفة المربعة
- المصفوفة المستطيلة
- المصفوفة المتماثلة
- المصفوفة الصفريـة
- مصفوفة الوحدة
- المصفوفة المبدلة (المحورة)

أنواع المصفوفات :

يوجد العديد من أنواع المصفوفات منها

1) المصفوفة المربعة :

هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة (أي أن : م = ن)

أمثلة : $أ^{*} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $ب^{*} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

تُعتبر مصفوفات مربعة لأن عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة في كل منها

2) المصفوفة المستطيلة :

هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف لا يساوي عدد الأعمدة (أي أن م ≠ ن)

أمثلة :

$$\text{أ}^{*} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 8 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{ب}^{*} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{حـ}^{*} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & -1 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

مصفوفات مستطيلة فالمصفوفة أ* تتكون من ثلاثة صفوف وعمودين وهي بذلك تكون من الدرجة 3× 2 وهكذا .....

وقد تكون المصفوفة المستطيلة محتوية على صف واحد وعدد ن من الأعمدة وتسمى بالمتجه الصفي ($\overset{*}{\text{ب}}$) ،
وقد تحتوي على عمود واحد وعدد ن من الصفوف و تسمى بالمتجه العمودي ($\overset{*}{\text{أ}}$) ،

مثل :

$$\overset{*}{\text{ب}} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \overset{*}{\text{أ}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) المصفوفة المتماثلة :

هي مصفوفة مربعة إذا استبدلت الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف لكان الناتج هو ذات المصفوفة الأصلية ، وذلك لتماثل العناصر المتناظرة أعلى وأسفل القطر الرئيسي .

أمثلة :

$$* أ = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad * ب = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ -7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad * حـ = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & \text{صفر} \\ 6 & -7 & -5 & 9 \\ 4 & -5 & 4 & 3 \\ \text{صفر} & 9 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

4) المصفوفة الصفرية :

هي مصفوفة جميع العناصر بها عبارة عن أصفار

مثال: حـ* = $\begin{pmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} \end{pmatrix}$

5) مصفوفة الوحدة :

هي مصفوفة مربعة بحيث أن عناصر قطرها الرئيسي هو الواحد أما بقية العناصر الباقي هي الصفر ، ويُرمز لهذه المصفوفة بالرمز I^*

أمثلة : $I_2^* = \begin{pmatrix} \text{صفر} & 1 \\ 1 & \text{صفر} \end{pmatrix}$, $I_3^* = \begin{pmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & 1 \\ \text{صفر} & 1 & \text{صفر} \\ 1 & \text{صفر} & \text{صفر} \end{pmatrix}$

تابع مصفوفة الوحدة I^*

- هي مصفوفة مربعة (عدد الصفوف = عدد الأعمدة)
- عناصر القطر الرئيسي و احد صحيح أما باقي العناصر هي الصفر.
- أمثلة:

$$I^*_{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

مصفوفة الوحدة من الرتبة الثانية

$$I^*_{٣} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

مصفوفة الوحدة من الرتبة الثالثة

6) المصفوفة المُحورة (مبدول المصفوفة) :

هي المصفوفة الناتجة من استبدال صفوف مصفوفة ما بأعمدتها وأعمدتها بصفوفها ، وإذا كانت المصفوفة الأصلية هي ب* فإن مبدلها أو المصفوفة المحورة لها يُرمز لها $\overline{\text{ب}}^{*}$

ومن ناحية أخر إذا كانت المصفوفة الأصلية ب* من الرتبة (م x ن) فإن مبدلها أو المصفوفة المحورة لها $\overline{\text{ب}}^{*}$ تكون من الرتبة (ن x م) .

مثال : ب* = $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ ، فإن معكوس المصفوفة $\overline{\text{ب}}^{*}$ = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & -7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

العمليات الحسابية للمصفوفات

- جمع و طرح المصفوفات:
- مثال (٤-١) **١٥٥**
-

أ*= ٣ ٢
١
٤ ٥ ٣
١ ٢ .

ب*= ، ١- ٣
٤
٢ ١ ٢
٥ ٢- ١

أ*+ب* =

3	٢	
١		
٣	٥	٤
٢	١	
٠		

+

٣	-١	
		٤
2	٢	١
١	-٢	٥

=

٥	٥	٢
٥	٦	٦
١	٠	٦

أ* - ب* =

3	٢	
١		
٣	٥	٤
٢	١	
٠		

-

٣	-١	
		٤
2	٢	١
١	-٢	٥

=

-٣	-١	٤
١	٤	٢
-١	٤	-٤

ضرب المصفوفات

- ضرب المصفوفة × معامل عددي
- المصفوفة × المصفوفة

ضرب المصفوفات في مقياس عددي

- مثال ٤ ـ٣ ص / ١٥٨
- إذا كانت
- أوجدي ٥ أ + ٣ ب

أ* = ٢ ٢ - ١ ١

ب* = ٣ ٢ - ٠ ١-

= ٢ ٥ ٢ - ١ + ٣ ٣ - 2 ٠ ١- =

= ٥ ١٠ ٥ ٠ + ٥ - ٦ - ٩ =

١٦ ١ - ١٩

تابع ضرب المصفوفات

- الشرط: عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى (في ترتيب الضرب) يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية.
- مثال ٤ـ٤ ص /١٦٠

عملية الضرب

عناصر الصف (١) × عناصر العمود (٢) =عناصر الصف (١) × عناصر العمود (١)

عناصر الصف (٢) × عناصر العمود (٢) = عناصر الصف (٢) × عناصر العمود (٢)

ناتج الجمع = العنصر الناتج في الصف (١)

أ* = (٢ ٣ -
١
١ ٢ ٤)

أ* = (٣
٤
٢ ٢
-١ ١)

أ* = ٢ ٣ -
١ ٢ ١ ٤

ب* = ٣ ٤
٢ ٢
١ ١-

أ*×ب* =

٢ ٣ ١-
١ ٢ ٤

×

٣ ٤
٢ ٢
١- ١

(٢×٣) +[(٣×٢) + (١-×١-)] (٢×٤) +[(٣×٢) + (١-×١)]
(١×٣) +[(٢×٢) + (٤×١-)] (١×٤) +[(٢×٢) + (٤×١)]

أ* = ٦+٦+١ ٨+٦-١
٣+٤-٤ ٤+٤+٤

= ١٣
١٣

- **الشرط** عد د الأعمدة = عدد الصفوف
- المصفوفة (١) المصفوفة (٢)
- عملية الضرب:
- **اولا: الصف الاول**
- عناصر الصف (١) × عناصر العمود (١)
- عناصر الصف (١) × عناصر العمود (٢)
- **ثانياً الصف الثاني**
- = عناصر الصف (٢) × عناصر العمود (١)
- عناصر الصف (٢) × عناصر العمود (٢)
- **ثالثاً:**
- ناتج الجمع = العنصر الناتج في الصف (١)

• **تابع ضرب :حالات خاصة مثال (٤-٥) صـ / ١٦١**

أ* = [٢]
٥

جـ* = [ ]
٣
٢

المطلوب : أ* × جـ

= [٢ ٥] أ* ×× جـ* [-٣ ٢]

[(٢×-٣) + ٤] = [(٥×٢)]

• **تمرين :**

أ* = ⎡ **٢** ⎤ **٤**

جـ* = ⎡ **٣** ⎤ **٤**

المطلوب : أ* × جـ

أ* × جـ* = (٢ ٤) × (-٣ ٤)

= [(٢×-٣) + (٤×٤)] = [١٠]

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين وأن : أ x ب = I (مصفوفة الوحدة)

فإنه يقال أن ب عبارة عن مقلوب أ ، وفي هذه الحالة يُرمز لمقلوب أ بالرمز أ$^{-1}$

ويشترط لأن يكون للمصفوفة المربعة مقلوب أن يكون محدد هذه المصفوفة مختلفا عن الصفر.

إيجاد مقلوب المصفوفة

- / مثال (٤-٧) ١٦٣

أ* = -١
٢

١ ٤

- أوجدي مقلوب المصفوفة
- حيث أ* المصفوفة ، (أ*) مقلوب المصفوفة

- **خطوات ايجاد مقلوب المصفوفة :**
- ايجاد قيمة محدد المصفوفة أ*
- ايجاد مصفوفة المرافقات أ*(م)
- ايجاد المصفوفة المبدلة لمصفوفة المرافقات أ*(م)
- قسمة المصفوفة المبدلة على قيمة المحدد

١)ايجاد قيمة المحدد للمصفوفة

أ* = (-١ ، ٢)

|أ*(م)| = | -١ ، ٢ | (- ، +)

= (-١×٤) - (٢×١) = -٦

٢)مصفوفة المرافقات

أ*(م) = (٤ ، ١ ، ١) (+ ، - ، - ، +)

أ*(م) = (٤ ، - ، ١)

-١ ، -٢

٣)مبدل مصفوفة المرافقات

-١ ، ٢

أ* (م) = (٤ ، - ، ٢)

-١ ، -١

٤)مقلوب المصفوفة

$$أ^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{-6} & \frac{4}{-6} \\ \frac{-1}{-6} & \frac{-1}{-6} \end{pmatrix}$$

٦

- يمكن التوصل لمقلوب المصفوفة (٢×٢) بطريقة مختصرة
- وهذا يقتصر علي المصفوفة (٢×٢)
- مقلوب المصفوفة =

مقلوب محدد المصفوفة

×

المصفوفة الاصلية بعد:
١.تبديل عناصر القطر الاصلي،
٢.عكس اشارات عناصر القطر الفرعي

أ* =

-١	٢
١	٤

١. ١.تبديل عناصر القطر الاصلي،
٢.عكس اشارات عناصر القطر الفرعي

٤	-٢
-١	-١

قيمة المحدد للمصفوفة = -٦

مقلوب محدد المصفوفة = ١/-٦

مقلوب المصفوفة ؟

أ*$^{-١}$ =

٤/-٦	-٢/-٦
-١/-٦	-١/-٦

مثال : أوجد مقلوب أ* حيث أن : $\text{أ}^{*} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

الحل :

4) نطبق العلاقة : $\text{أ}^{*-1} = \dfrac{1}{|\text{أ}^{*}|} \times \overline{\text{أ}}^{*}_{(\text{م})}$

$$\text{أ}^{*-1} = \frac{1}{-6} \times \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{4}{-6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

- **ـ تطبيقات على المصفوفات مثال ٤ ــ ١٠ صـ ١٦٨ /**
- المعطيات: مصنع يحتاج إلى نوعين من المواد الخام   س = المصفوفة الأولى
- ص = المصفوفة الثانية
- المطلوب: إجمالي احتياجات المصنع من النوعين من المواد الخام
- + (جمع مصفوفتين)

ملحوظة هامة

- مصفوفة أ × مقلوب مصفوفة أ = مصفوفة الوحدة
- **أ* × أ*-١ = I***

-١ ٢
١ ٤

×

٤/-٦ -٢/-٦
-١/-٦ -١/-٦

=

١ صفر
صفر ١

تطبيقات على المصفوفات
مثال ٤-١٠ ص ١٦٨

إيجاد إجمالي الاحتياجات من المواد الخام لإنتاج الموديلين:

س + ص =

س= ٤ ٢
٤
٣ ٤ ٣
٥ ٤ ٣

ص= ٥ ٣
٣
٣ ٢ ٢
٢ ٤ ١

أ ب ج + أ ب ج = أ ب ج

٤

٣

٤ ٢ ٥ ٣ ٩ ٥

٣ ٧

٤ ٣

٢ ٢٣ ٢ ٦ ٦ ٥

٢ ٤ ١ ٧ ٨ ٤

إجمالي الإحتياجات

أ ب ج

٩٠٠٠ ٥٠٠٠ ١٨بوصة

٧٠٠٠ ٢٠ بوصة

٦٠٠٠ ٦٠٠٠ ٥٠٠٠ ٢٤ بوصة

٧٠٠٠ ٨٠٠٠ ٤٠٠٠

- **مثال ٤ ـ ١١ صـ/ ١٦٩**
- **تطبيق: ضرب المصفوفات (الحالة الخاصة)**
- المعطيات:
- ـ مصنع يستخدم (٣) مواد خام (س ، ص ، ع) الاحتياجات = المصفوفة أ
- ـ ت. المادة الخام (بالريال) لكل مادة خام = المصفوفة ب
- المطلوب: التكلفة الكلية للمواد الخام اللازمة للإنتاج.
- الشرط (مهم): المتجه الصفي × المتجه العمودي

المطلوب: التكلفة الكلية للمواد الخام اللازمة للإنتاج.

	س	ص	ع
أ*	١٢	٢٠	١٥

أ*×ب*= (١٢ ٢٠ ١٥) × (٥ ٦ ٤)

	ب*
س	٥
ص	٦
ع	٤

[(٢٠× ٥) + (١٥× ٦) + (١٢×٤)] = ٢٣٨ ألف ريال

- مثال ٤-١٢ ص ١٧٠)
- مصنع ينج منتجين(أ، ب) باستخدام كميات مختلفة من المواد الخام (س، ص ، ع) وبفرض ان احتياجات بآلاف الوحدات من المواد الخام المستخدمة ، يمكن توضيحها في المصفوفة (م) التالية :
- م* المنتج (أ)

المنتج (ب)

٣	٢	٤
[illegible]	٢	٥
	٢	

وكل من المنتجين يتم في فرعين مختلفين (١، ٢) وكانت تكاليف الفرعين لكل وحدة من المواد الخام بالريال توضحها المصفوفة

- ل* (س)

(ص)

(ع)

١٠	١٢
٨	٧
٦	٥

المطلوب: احسبي التكلفة الكلية للشركة بفرعيها من المواد الخام

١٢   ١٠   ×   ٤   ٢   ٣
٧   ٨   ٥   ٢
٥   ٦   ١

(٥×٤)+(٧×٢)+(١٢×٣)   (٦×٤)+(٨×٢)+(١٠×٣)
(٦×١)+(٨×٥)+(١٠×٢)
(٥×١)+(٧×٥)+(١٢×٢)

(٢٠)+(١٤)+(٣٦)   (٢٤)+(١٦)+(٣٠)
(٥)+(٣٥)+(٢٤)   (٦)+(٤٠)+(٢٠)

٧٠   ٧٠
٦٤   ٦٦

- مصنع ينتج ٣ انواع من الثلاجات احجام ١٠،١٢،١٤ قدم وفيما يلي كمية الإنتاج عن شهر محرم ١٤٣٠
- ٣٠٠٠ ثلاجة (١٠ قدم) ، ٥٠٠٠ ثلاجة(١٢قدم) ، ٤٠٠٠ ثلاجة(١٤ قدم
- ،اذا علمتي ان الثلاجات يلزم لإنتاجها نوعين من المواد الخام (أ،ب) لكل نوع من الثلاجات علي شكل المصفوفة التالية بالطن

$$\begin{pmatrix} ١٠ & ٢٥ \\ ٢٠ & ٣٠ \\ ٣٠ & ٤٠ \end{pmatrix}$$

المطلوب: تحديد كمية المواد الخام الازمة لمواجهة الإنتاج الشهري

- كمية المواد الخام اللازمة = كميات الانتاج × احتياجات الإنتاج للمواد الخام

٣٠٠٠	٥٠٠٠	٤٠٠٠	×	٢٥ ١٠ ٣٠ ٢٠ ٤٠ ٣٠

(٢٥×٣٠٠٠)+(٣٠×٥٠٠٠)+(٤٠×٤٠٠٠)   (١٠×٣٠٠٠)+(٢٠×٥٠٠٠)+(٣٠×٤٠٠٠)

(٣٨٥٠٠٠   ٢٥٠٠٠٠)

٣٨٥٠٠٠ وحدة من المادة الخام(أ)

٢٥٠٠٠٠وحدة من المادة الخام (ب)

استخدام المصفوفات في حل المعادلات

الشروط:

عدد المعادلات = عدد المجاهيل.

مصفوفة المجاهيل مربعة و لها معكوس.

لحل مجموعة من المعادلات تحقق الشرطين السابقين نوجد:

مقلوب مصفوفة المعاملات.

نضرب مقلوب مصفوفة المعاملات في متجه الحدود المطلقة للحصول على متجه المجاهيل.

مثال ٤ – ١٥ ص ١٧٤

- حلى المعادلات الآتي باستخدام المصفوفات:

س + ص = ٤

٢س + ٣ ص = ١١

١)إيجاد قيمة المحدد للمصفوفة

أ*(= ١ ١

أ*(م) ١ ١ = أ* + -

= (١×٣)- (٢×١) = ١

٢)مصفوفة المرفقات

٣ ٢ + -

أ*(م) = ٣ ٢

+ -

١ ١

٣ ٢

أ*(م) = ٣ -

٢

١ ١-

٣)مدور مصفوفة المرفقات

مصفوفة المرفقات المبدلة

أ*(م) = ٣ - ١

٤)مقلوب المصفوفة

أ*-١ = ٣ ١- ١ ١

١ ٢-

(مقلوب المصفوفة)

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ... \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٤ & - \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$$

ع

$$= \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ (& ١ & ١ \end{pmatrix} - = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

(-٨ + ١ ١)

(س = ١ ، ص = ٣) -٢

نطبق العلاقة : $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \times \overline{أ}_{(م)}$

ثانياً نطبق نموذج حل المعادلات (بالطريقة المختصرة باستخدام المصفوفات :

(مقلوب المصفوفة) $^{-1}$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & \\ & ٢ \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ١ \; ٣ \end{pmatrix}$$

ع

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} \; ١ = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \times ٣ \begin{pmatrix} ٤ & - \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$$

$$=) \; ٢ \; ١ - (١ \; ١ = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

(-٨ + ١١)

-٢ (س=١ ، ص=٣

نطبق العلاقة : أ$^{-1}$ = $\frac{1}{|أ^*|}$ × أ$^*_{(م)}$

تمنياتي بالنجاح

تمنياتي بالنجاح

٦

الفصل السادس

تحليل المدخلات والمخرجات

تحليل المدخلات و المخرجات

- يهدف نموذج المدخلات والمخرجات إلى تحديد حجم الإنتاج (المخرجات) لكل قطاع لكى يستطيع أن يلبى إحتياجات القطاعات الإنتاجية الأخرى وإحتياجات المستهلكين دون أن يحدث إختناق فى الإقتصاد الوطنى .

- يقوم النموذج على أساس تساوى المخرجات الكلية مع المدخلات الكلية في الاقتصاد الوطني .
- وعلى هذا الأساس يتم افتراض أن إنتاج كل قطاع ينقسم إلى قسمين أساسيين :

١. مخرجات تستخدم كمدخلات وسيطة للقطاع نفسه أو كمدخلات وسيطة للقطاعات الأخرى.
٢. مخرجات تستخدم كمنتج نهائي للاستهلاك المحلى وللتصدير وتسمى الطلب النهائي .

مثال لتوضيح فكرة التشابك القطاعي لاقتصاد ما

- يمكن شرح العلاقات التشابكية باستخدام المثال التالى من الكتاب ص / ١٨٦.
- ويمكن كذلك حساب مصفوفة المعاملات الفنية التي توضح احتياجات كل قطاع من نفس القطاع ومن القطاعات الأخرى لإنتاج وحدة من إنتاجه .(موضحة بعد الجدول)

قطاعات مستهلكة / قطاعات منتجة	س	ص	ع	الطلب النهائي	الإنتاج الكلى جملة المخرجات
س	١٠٠	٣٠٠	١٠٠	٥٠٠	١٠٠٠
ص	١٠٠	٢٠٠	٥٠٠	١٢٠٠	٢٠٠٠
ع	٥٠	٢٥٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠٠

ولتوضيح فكرة تحليل المنتج والمستخدم ، نفترض أن البيانات التالية تمثل مصفوفة التشابك القطاعي لاقتصاد ما يتكون من ثلاث قطاعات (س) ، (ص) ، (ع) .

قطاعات مستهلكة / قطاعات منتجة	س	ص	ع	الطلب النهائي	الإنتاج الكلي (جملة المخرجات)
س	100	300	100	500	1000
ص	100	200	500	1200	2000
ع	50	250	100	600	1000

يمكن النظر لكل قطاع من زاويتين :

الأولى : بوصفه قطاع منتج يمد نفسه والقطاعات الأخرى ببعض المدخلات وتمثل الصفوف الطريقة التي من خلالها يتم استخدام ناتج كل قطاع أى مخرجاته ، فجزء من هذا الناتج يتم استخدامه كسلعة وسيطة تدخل فى قطاعات أخرى والباقي يمثل الطلب النهائي على منتجات هذا القطاع

فمثلا يقوم القطاع (س) بتصريف إنتاجه الكلي (إجمالي مخرجاته) وقيمته 1000 وحدة نقدية كما يلي :

استخدام ما قيمته 100 وحدة نقدية كمادة خام لإنتاجه الخاص (أي لإنتاج القطاع (س).

بيع ما قيمته 300 وحدة نقدية إلى القطاع (ص). بيع ما قيمته 100 وحدة نقدية إلى القطاع (ع)

بيع ما قيمته 500 وحدة نقدية لتلبية الطلب النهائي على إنتاجه

ويمكننا بنفس الأسلوب تحليل إنتاج القطاعيْن الآخريْن (ص ، ع) من حيث الإنتاج والتوزيع.

وفي ضوء ما تقدم يمكننا تحديد نسبة مساهمة كل قطاع في تحقيق إجمالي إنتاج القطاع (س) على النحو التالي :

نسبة مساهمة القطاع (س) = $\frac{100}{1000} = 0.1$ وحدة   نسبة مساهمة القطاع (ص) = $\frac{100}{1000} = 0.1$ وحدة

نسبة مساهمة القطاع (ع) = $\frac{50}{1000} = 0.05$ وحدة

وتُسمى كل من النسب السابقة بمعامل الاستخدام (المعامل الفني) وبالمثل يمكننا توضيح وتفسير بيانات القطاعيْن الآخريْن

مصفوفة المعاملات الفنية: في ضوء ما تقدم يمكننا تكوين مصفوفة المعاملات الفنية التي تلخص احتياجات كل قطاع من باقي القطاعات لإنتاج وحدة واحدة فقط من إنتاجه ، أي أن مصفوفة المعاملات الفنية هي عبارة عن جدول يوضح المعاملات الفنية (أو معاملات الاستخدام) لكافة القطاعات الثلاث ، و تأخذ مصفوفة المعاملات الفنية الشكل التالي :

المستخدم ↓ / المنتج ←	س	ص	ع
س	0.1	0.15	0.1
ص	0.1	0.1	0.5
ع	0.05	0.125	0.1

مصفوفة المعاملات الفنية

قطاعات منتجة / قطاعات مستهلكة	س	ص	ع	الطلب النهائي	الإنتاج الكلى جملة المخرجات
س	١٠٠	٣٠٠	١٠٠	٥٠٠	١٠٠٠
ص	١٠٠	٢٠٠	٥٠٠	١٢٠٠	٢٠٠٠
ع	٥٠	٢٥٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠٠

- نسبة مساهمة كل قطاع (س، ص، ع) في تحقيق إنتاج القطاع (س) علي النحو التالي

٣٠٠ ١٠٠

١٠٠

١٠٠٠ ٢٠٠٠ ١٠٠٠

٢٠٠ ١٠٠

٥٠٠

١٠٠٠ ٢٠٠٠ ١٠٠٠

- وتسمي كل من النسب الناتجة بمعامل الاستخدام (المعامل الفني) ويرمز لمصفوفة المعاملات الفنية•
- بالرمز (A)

٠.١٥ ٠.١

٠.١

٠.١ ٠.١

٠.٥

مثال (٥-١) صـ ١٩٠/

- اقتصاد مكون من قطاعين أ و ب ، الجدول التالى يوضح تحليل المدخلات والمخرجات للقطاعين :

من قطاع / الي قطاع	أ	ب	الطلب النهائي	الإنتاج الكلى
أ	٤	١٠	٣٦	٥٠
ب	١٠	٥	٨٥	١٠٠
الإجمالي	١٤	١٥	١٢١	١٥٠

تابع المثال

- ماهو حجم الإنتاج اللازم من القطاعين لمواجهة طلب نهائى :
- $ط_{أ} = ٥٠$
- $ط_{ب} = ١٠٠$

٤

١٠

٥ ١٠

أولاً)ايجاد مصفوفة المعاملات الفنية

مصفوفة المعاملات الفنية

ط أ =٥٠ ط ب =١٠٠

١٠ ٤

٥٠ ١٠٠

١٠

٥ = ٥٠

٠.٠٨ ٠.١٠

=

٠.٢٠ ٠.٠٥

ثانيا)ايجاد مصفوفة ليونتيف

١٠٠

مصفوفة الوحدة ــ مصفوفة المعاملات الفنية = مصفوفة ليونتيف

١ ٠

٠ ١

-

٠.٠٨ ٠.١٠

٠.٢٠ ٠.٠٥

=

٠.٩٢ - ٠.١

- ٠.١ ٠.٩٥

ثالثا)إيجاد مقلوب مصفوفة ليونتيف

تمر عملية إيجاد مقلوب المصفوفة بالخطوات التالية :

- إيجاد قيمة محدد المصفوفة Δ= ٠,٨٥٤
- إيجاد مرافقات العناصر وعمل مصفوفة المرافقات
- مدور مصفوفة المرفقات إيجاد المصفوفة المبدلة ، وهي عبارة عن تبديل مصفوفة المرافقات حيث يتم تبديل الصفوف لأعمدة والأعمدة لصفوف.
- إيجاد مقلوب المصفوفة ويرمز له بالرمز (أ) -١ وذلك بقسمة المصفوفة المبدلة على قيمة المحدد Δ

ثالثا)إيجاد مقلوب مصفوفة ليونتيف

١)إيجاد قيمة المحدد للمصفوفة

$$\begin{vmatrix} ٠.٩٢ & -٠.١ \\ -٠.١ & ٠.٩٥ \end{vmatrix} = (٠.٩٢ \times ٠.٩٢) - (-٠.١ \times -٠.١)$$

$$= ٠.٨٥٤$$

٢)مصفوفة المرافقات

$$\begin{pmatrix} +|٠.٩٥| & -|-٠.٢| \\ -|-٠.١| & +|٠.٩٢| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠.٩٥ & ٠.٢ \\ ٠.١ & ٠.٩٢ \end{pmatrix}$$

٣)مدور مصفوفة المرافقات

$$\begin{pmatrix} ٠.٩٥ & ٠.١ \\ ٠.٢ & ٠.٩٢ \end{pmatrix}$$

٤)مقلوب المصفوفة

$$\frac{١}{} \times \begin{pmatrix} ٠.٩٥ & ٠.١ \\ ٠.٢ & ٠.٩٢ \end{pmatrix}$$

رابعاً)إيجاد الانتاج الكلي (جملة المخرجات)

مقلوب مصفوفة ليونتيف × الطلب النهائي الجديد = الانتاج الكلي

$$\frac{١}{٠.٨٥٤}\begin{pmatrix} ٠.٩٥ & ٠.١ \\ ٠.٢ & ٠.٩٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥٠ \\ ١٠٠ \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ١.١١٢ & ٠.١١٧ \\ ٠.٢٣٤ & ١.٠٧٧ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥٠ \\ ١٠٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦٧.٣٣ \\ ١١٩.٤٤ \end{pmatrix}$$

(١.١١٢ × ٥٠) + (٠.١١٧ × ١٠٠)=٦٧.٣٣

(٠.٢٣٤ × ٥٠) + (١.٠٧٧ × ١٠٠)=١١٩.٤٤

أي يجب أن يكون حجم الإنتاج الجديد في القطاع (إ) ٦٨ وحدة ،

وفي القطاع (ب) ١٢٠ وحدة

مثال (٥-٤)ص ١٩٧

- أعطيت لك البيانات الخاصة بدخلات قطاعي الصناعة والزراعة :

مصفوفة ليونيتف

٠,٢-	٠,٤
٠,٥٥	٠,٣ -

الطلب النهائي لمنتجات القطاعين هو

٨
١٨

فإذا زاد الطلب النهائي علي المنتجات الصناعية بمقدار ٧ وحدات ، فالمطلوب تحديد أثر ذلك علي متجه الإنتاج الكلي للقطاعين

ثانياً نطبق نموذج حل المعادلات (بالطريقة المختصرة باستخدام المصفوفات :

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٠,٢ & ٠,٤ \\ ٠,٥٥ & -٠,٣ \end{pmatrix}^{-١} \times \begin{pmatrix} ٨ \\ ١٨ \end{pmatrix}$$

(مقلوب المصفوفة)

ع

$$\frac{١}{\quad} \begin{pmatrix} ٠,٢ & ٠,٥٥ \\ ٠,٤ & ٠,٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٨ \\ ١٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥٠ \\ ٦٠ \end{pmatrix}$$

$$\frac{١}{١,١٦} \begin{pmatrix} ٠,٢ & ٠,٥٥ \\ ٠,٤ & ٠,٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١٥ \\ ١٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧٤ \\ ٧٣ \end{pmatrix}$$

التغير في متجه الإنتاج الكلي =

$$\begin{pmatrix} ٧٤ \\ ٧٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٥٠ \\ ٦٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٤ \\ ١٣ \end{pmatrix}$$

٠,١٦

مع تمنياتي بالنجاح

مع تمنياتي بالنجاح

٧

التفاضل وتطبيقاته الاقتصادية والإدارية

الفصل السابع

التفاضل وتطبيقاته الاقتصادية والإدارية

- **الفصل السابع**
- يتناول دراسة مفهوم مشتقة الدالة وكيفية حسابها.
- يتناول دراسة حساب المشتقات الجزئية الأولى للدوال في أكثر من متغير.
- يتناول دراسة حساب المشتقات العليا للدوال في متغير واحد/ أكثر من متغير.
- يتناول دراسة تطبيقات التفاضل في النواحي الاقتصادية والإدارية.

التفاضل وتطبيقاته الاقتصادية والإدارية

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين اى ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر.فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر.ويدل معدل التغير على مقدار التغير فى المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل أو التفسيري بوحدة واحدة.

قواعد التفاضل

المشتقة الأولى للدالة ص=د(س) يرمز لها بالرمز

ص׳ أو د ص/د س

قوانين المشتقة الأولى للدالة :

١ـ تفاضل الدالة الثابتة:

- **ص= مقدار ثابت د ص/ د س=صفر**
- **ص = ٧٥**

٢ـ قاعدة القوى (الاس): (تفاضل الاس)

ص= س ^{ن}

د ص / د س= ن س $^{ن - ١}$

مثال صفحة / ٢٤٠

- ص= س ^{٢}
- د ص / د س= ٢ س $^{٢ - ١}$
- = ٢ س

تابع قوانين المشتقة الأولى للدالة

٣ـ تفاضل (الثابت × الدالة): = الثابت × تفاضل الدالة

- ص= أ س ن

د ص / د س= أ ن س ن - ١

ص=٥ س ٢

د ص / د س= ٥ x ٢ س ٢ - ١

= ١٠ س

- ٤ـ تفاضل حاصل جمع (طرح) دالتين

= تفاضل الدالة (١) + تفاضل الدالة (٢) ± ..

- إذاكانت ص= مج د(س) فستكون د ص / د س= مجموع تفاضل د(س)

أى أنه إذا كانت ص تساوى مجموع دوال فى س ، فإن تفاضلها بالنسبة للمتغير س يساوى مجموع تفاضل كل دالة

مثال ٧ـ٢ ص / ١ ٤ ٢

ص = س٥ ـ ٦ س٣ +٨س ـ ٢ ٥

د ص / د س = ٥ س٤ ـ ١٨ س٢ + ٨

حاصل ضرب دالتين

٥ـ تفاضل حاصل ضرب الدالتين

= الدالة (١) × تفاضل الدالة (٢) + الدالة (٢) × تفاضل الدالة (١)

- ص=ع . ل حيث ع ، ل دالتين فى س

فإن د ص / د س =

ع x (د ل / د س) + ل x (د ع / د س)

أى أن د ص / د س =

الدالة الأولى x تفاضل الثانية + الدالة الثانية x تفاضل الأولى

تفاضل الأولى x تفاضل الثانية + الدالة الثانية x الدالة الأولى د ص / د س =

مثال : صـ ٢ ٤ ٢

ص = (س^{٣} - ٣ س)(س^{٢} + ٢ (

$\frac{\partial ص}{\partial س} =$ **(س^{٣} - ٣ س)(٢ س) + (س^{٢} + ٢)(٣س^{٢} - ٣)**

= ٢س^{٤} - ٦ س^{٢} + ٣س^{٤} + ٦س^{٢} - ٣س^{٢} - ٦

= ٥س^{٤} - ٣ س^{٢} - ٦

حاصل قسمة دالتين

٦ـ د ص / د س =

المقام x تفاضل البسط ـ البسط x تفاضل المقام

مربع المقام

مثال صفحة ٢٤٣

- ص = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{2} - 1}$ (كمية موجبة)

حاصل قسمة دالتين

فإن د ص / د س =

المقام x تفاضل البسط - البسط x تفاضل المقام
مربع المقام

ص = س / (س٢ – ١)

= [(س٢ – ١) × ١ – (س) × ٢س] / (س٢ – ١)٢ = [(س٢ – ١) –٢س٢] / (س٤ – ٢س٢ +١)

- = (-س٢ – ١) / (س٤ – ٢س٢ +١)

التفاضل الجزئى

- **إذاكانت ص = د (س ، ع) حيث س و ع متغيرين مستقلين . وإذا إفترضنا ثبات ع ، فإن ص تكون دالة فى س**
- **ويمكن حساب مشتقة ص بالنسبة إلى س .تسمى المشتقة التى نحصل عليها بالمشتقة الجزئية الأولى للمتغير ص بالنسبة للمتغير س**
- إذا كانت ص المتغير يرتبط بمتغيرين مستقلين (س ، ع)

بافتراض ع ثابتة

←

- . . التفاضل (الجزئي) ص بالنسبة لـ س (—)

ص

س

التفاضل الجزئى

- **<u>مثال</u> ٧ _ ١٤ صفحة / ٢٥١**
- **ط = ٢ ث^{٢} + ٣ ث ل _ ٥ ل^{٢}**
- أوجدي التغيرات الحدية للكمية المطلوبة (ط) بالنسبة لكل من السعر (ث) / والدخل (ل) معدل التغير
- **التغير الحدي للطلب بالنسبة للسعر**

$$\frac{\partial ط}{\partial ث} =$$ ∆ ط بالنسبة للسعر **= ٤ ث + ٣ ل**

- **التغير الحدي للطلب بالنسبة للدخل**

$$\frac{\partial ط}{\partial ل} =$$ ∆ ط بالنسبة للدخل **=٣ ث - ١٠ ل**

التفاضل الجزئى

- مثال صفحة / ٧-١٤) ٢٥٢
- ج = ٥ خ^{٣} + ٣ خ^{٢} ع^{٣} – ٢٥ ع^{٤} - ٢٥
- الانتاج الحدي النسبة للمواد الخام

$$\frac{\partial ج}{\partial خ} = ١٥ خ^{٢} + ٦ خ^{١} ع^{٣}$$

- الانتاج الحدي النسبة للمواد للعمالة

$$\frac{\partial ج}{\partial ع} = ٩ خ^{٢} ع^{٢} - ١٠٠ ع^{٣}$$

المشتقات العليا للدالة :

إذا كانت الدالة : ص = س^{ن} وكانت (ن) عدد صحيح موجب ، فإنه يمكن الحصول على (ن+1) مشتقة لهذه الدالة مع ملاحظة أن المشتقة رقم (ن+1) ستساوي صفر

ويُرمز للمشتقة الثانية للدالة بالرمز: $\frac{د^{2}ص}{د س^{2}}$

ويُرمز للمشتقة الثالثة للدالة بالرمز: $\frac{د^{3}ص}{د س^{3}}$ وهكذا ....

المشتقات العليا للدالة (المشتقة الثانية)

- إذا كانت الدالة: ص = د (س) ⟵ دالة في متغير واحد

  ص ⟵ تتأثر بـ س فقط

- (التفاضل الأول)
- ١. المشتقة الأولي $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ص}'$
- ٢. يرمز المشتقة الثانية $\frac{\text{د}^{2}\,\text{ص}}{\text{د س}^{2}} = \text{ص}''$
- ٣. يرمز المشتقة الثانية $\frac{\text{د}^{3}\,\text{ص}}{\text{د س}^{3}} = \text{ص}'''$

ولذلك سميت بالمشتقات العليا للدالة.

المشتقات العليا للدالة
المشتقة الثانية

يرمز لها بالرمز $د^٢ ص / دس^٢$

أو

ص′′

مثال ٧_ ١٦ صفحة / ٢٥٤

ص = ٤ $س^٣$ _ ٢ / س

أوجدي المشتقات الأولى والثانية

- ص = ٤ س^{٣} - $\frac{٢}{س}$ =
- الحل = ٤ س^{٣} – ٢س$^{-١}$

التفاضل الأول

$\frac{دص}{دس}$ = ١٢س^{٢} – (-١)٢س$^{-٢}$ = س^{٢} + ٢س$^{-٢}$

صً = ٢٤ س – ٤ س$^{-٣}$ المشتقة الثانية

- صً = ٢٤ + ١٢ س$^{-٤}$ المشتقة الثالثة
- **المشتقات الجزئية الثانية للدالة في أكثر من متغير ملغي**

(2) مرونات الطلب :

مدى استجابة (المتغير التابع) الكميات المطلوبة من سلعة أو خدمة ما للتغير في (المتغير المستقل) سعر السلعة أو الدخل أو أسعار السلع الأخر

$$\text{مرونة الطلب} = م_{س} = \text{المشتقة الأولى للدالة} \times \frac{\text{المتغير المستقل}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

وهناك ثلاثة أنواع لمرونات الطلب :

أ) مرونة الطلب السعرية .

ب) مرونة الطلب الدخلية .

ج) مرونة الطلب التقاطعية.

أ) مرونة الطلب السعرية :

هي مقياس لمدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة ما للتغيرات في سعرها . بمعنى آخر هي :

$$\text{مرونة الطلب السعرية} = م_{ث} = \frac{\partial ط}{\partial ث} \times \frac{ث}{ط}$$

أنواع مرونة الطلب السعرية

معامل المرونة (م ث)

إشارة معامل مرونة الطلب السعرية تكون سالبة لان العلاقة عكسية بين الثمن والكمية المطلوبة

- طلب عديم المرونه: |م ث| = صفر
- طلب غير مرن: |م ث| < ١
- طلب مرن: |م ث| > ١
- طلب متكافئ المرونة: |م ث| = ١
- طلب لانهائي المرونة: |م ث| = ∝

م ث < ١: عندما يتغير سعر السلعة بنسبة ١% فإن الكمية المطلوبة منها تتغير بنسبة أقل من ١%.

م ث > ١: عندما يتغير سعر السلعة بنسبة ١% فإن الكمية المطلوبة منها تتغير بنسبة أكبر من ١%.

م ث = ١: عندما يتغير سعر السلعة بنسبة ١% فإن الكمية المطلوبة منها تتغير بنسبة ١%.

ب) مرونة الطلب الدخلية :

تعرف مرونة الطلب الدخلية بأنها مقياس لدرجة استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة ما بالنسبة للتغيرات في الدخل .

$$\text{مرونة الطلب الدخلية} = م_ن = \frac{\partial ط}{\partial ل} \times \frac{ل}{ط}$$

الحالات الأربع لمرونة الطلب الدخلية :

1) إذا كانت : $م_ن > 0$ فإن ذلك يعني أن السلعة عادية

2) إذا كانت : $م_ن < 0$ فإن ذلك يعني أن السلعة رديئة

3) إذا كانت : $0 < م_ن < 1$ فإن ذلك يعني أن السلعة ضرورية

4) إذا كانت : $م_ن > 1$ فإن ذلك يعني أن السلعة كمالية

إذا كان معامل مرونة الطلب الدخلية موجب فإن السلعة تكون من السلع العادية أو الجيدة، و من حيث حجم معامل المرونة

٢- إذا كان معامل مرونة الطلب الدخلية سالب تكون السلعة رديئة أو دنيا حيث يؤدى ارتفاع الدخل إلى نقص الطلب منها

ج) مرونة الطلب التقاطعية :

تعرف مرونة الطلب التقاطعية بأنها مقياس لدرجة استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة ما بالنسبة للتغيرات في سعر سلعة أخرى

$$\text{مرونة الطلب التقاطعية} = م_ع = \frac{\partial ط}{\partial ع} \times \frac{ع}{ط}$$

إذا كانت :

1) $م_ع > 0$ ≡ سلعة بديلة

2) $م_ع < 0$ ≡ سلعة مكملة

3) كلما ازدادت قيمة معامل المرونة التقاطعية زادت درجة التكامل أو الإحلال (التبادل) بين السلع .

إذا كان معامل مرونة الطلب التقاطعية

(ــ)فإن السلعتين مكملتين.
لأن العلاقة بين ثمن سلعة والطلب على السلعة المكملة لها علاقة عكسية .
مثل(الشاي والسكر)

(+)فإن السلعتين بديلتين.
لأن العلاقة بين ثمن سلعة والطلب على السلعة البديلة تكون طردية (اللحوم والدجاج).

مرونة العرض

معامل المرونة (م ع ث)

تعريف مرونة العرض السعرية

هى مقياس لدرجة استجابة الكمية المعروضة من سلعة او خدمة للتغيرات فى سعرها.

أنواع مرونة العرض

عرض عديم المرونه	عرض غير مرن	عرض مرن	عرض متكافئ المرونة	عرض لانهائي المرونة
م ع ث = صفر	م ع ث < ١	م ع ث > ١	م ع ث = ١	م ع ث = ∞
التغير النسبى ك ع منعدم بالنسبة للتغير النسبي السعر	التغير النسبى فى ك ع أقل من التغير النسبى السعر.	التغير النسبى فى ك ع أكبر من التغير النسبى السعر.	التغير النسبى فى ك ع = التغير النسبى السعر وتسمي ايضا مرونة الوحدة	التغير النسبى ك ع لانهائي بالنسبة للتغير النسبي السعر

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل

- مرونة الطلب السعرية : مدى إستجابة التغيرات فى الكمية المطلوبةمن سلعة أو خدمة للتغيرات فى سعرها
- مرونة الطلب الدخلية : مدى إستجابة التغيرات فى الكمية المطلوبةمن سلعة أو خدمة للتغيرات فى الدخل
- حالات المرونة السعرية:
- القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)
- القيمة المطلقة للمرونة< ١ (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

تابع حالات مرونة الطلب

- القيمة المطلقة للمرونة= ١ (طلب متكافىء المرونة)
- القيمة المطلقة للمرونة> ١ (طلب مرن)
- القيمة المطلقة للمرونة= مالانهاية(طلب لانهائى المرونة)

دالة (معادلة الطلب الخطة

- تتأثر الكمية المطلوبة من سلعة أو(خدمة) خلال فترة معينة بسعر السلعة ، وأسعار السلع الأخرى (البديلة أو المكملة)، و الدخل، و عدد السكان، ويمكن أن تؤثر الاذواق كذلك، والسياسات الحكومية.

بفرض ثبات العوامل الاخري ك $_{ط س}$ = د (ث س، ل ، ث ب ، ث م ، ن، ذ، ....)

ميل منحنى الطلب وهو ثابت على طول المنحنى، ويوضح معدل التغير في الكمية المطلوبة عندما يتغير الثمن بمقدار وحدة واحدة . ب = د ك ط / د ث

الكمية المطلوبة من السلعة عندما يكون السعر صفر

ط = أ ــ ب (ث $_{س}$)

الكمية المطلوبة من السلعة (س)

الإشارة سالبة تعني :وجود علاقة عكسية بين الثمن والكميات المطلوبة

م ث = (د ط / د ث) × (ث / ط)

قياس مرونة الطلب

- **مرونة الطلب بإستخدام التفاضل :**
- **م ث =**
- **المشتقة الأولى لدالة الطلب x (السعر ÷ الكمية المطلوبة)**

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

المشتقة الأولى للدالة

م ث = $\frac{\text{د ك}}{\text{د ث}}$ × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

مثال

- **مثال ٧ ـ ١٩ صفحة / ٢٦٢**
- ط = ١٠٠ ـ ٥ ث
- إذا العلاقة بين ك ط وسعر سلعة ث ط = ...
- احسبي بطريقتين: مرونة الطلب على السلعة ك ط / تفسير النتائج؟

- **أوجدي المرونة اذا ارتفع السعر من ١٠ الي ١٥**

الطريقة الاولي : إيجاد مرونة الطلب السعرية

ث	ك ط
١٠	٥٠
١٥	٢٥

$$\text{م ث} = \frac{\text{د ط}}{\text{د ث}} \times \frac{\text{ث}}{\text{ط}} = \frac{\text{ط}_{٢} - \text{ط}_{١}}{\text{ث}_{٢} - \text{ث}_{١}} \times \frac{\text{ث}_{١}}{\text{ط}_{١}}$$

$$\text{م ث} = \frac{٢٥ - ٥٠}{١٥ - ١٠} \times \frac{١٠}{٥٠}$$

$\text{م ث} = \frac{-٢٥}{٥} \times \frac{١}{٥} = -١$ وهذا يعني الطلب متكافئ المرونة

الطريقة الثانية : إيجاد مرونة الطلب السعرية

د = ث م ١٠ = السعر × طنه = د ث / ط

د = ب ط / د ث

= ث / ط × ب = ث م

ط = ١٠٠ – ٥ ث

ط = ١٠٠ – ٥ × ١٠ = ٥٠

م ث = = - ٥ × ١٠ / ٥٠ = -١

وهذا يعني الطلب متكافئ المرونة

إيجاد ك ط

ث	ك ط
١٠	٥٠
١٥	٢٥

عند ث= ١٠

ط = ١٠٠ – ٥ ث

= ١٠٠ – ٥ × ١٠

= ١٠٠ – ٥٠

= ٥٠

عند ث= ١٥

ط = ١٠٠ – ٥ ث

= ١٠٠ – ٥ × ١٥

= ١٠٠ – ٧٥= ٢٥

- مثال (٧-٢١) ص ٢٦٣
- بفرض أن الطلب علي سلعة معينة متكافئ المرونة وأن الكمية المطلوبة من هذه السلعة (١٠٠) وحدة عند سعر قدره (٢٠) ريال ، فاحسب معدل تغير الطلب علي هذه السلعة بالنسبة إلي سعرها .
- م ث= دط × ث =
- دث ط
- -١= ب – (٢٠/١٠٠)
- ب = -١ ÷(١/ ٥) =
- = -١ × ٥ = -٥

مثال / (٧-٢٣) ٢٦٥

دالة الطلب : ط = ٤ ـ ث

أوجدى المرونة عند السعر ٠,٨ ريال

الحل

الكمية المطلوبة عند سعر ٠,٨ = ٤ ـ ٠,٨ = ٣,٢

ب = ـ ١

المشتقة الأولى لدالة الطلب = ـ ١

المرونة = ـ ١ x (٠,٨ ÷ ٣,٢) = ـ ٠,٢٥

القيمة المطلقة للمرونة = ٠,٢٥ أى أن الطلب ضعيف المرونة

الإيراد الحدى ومرونة الطلب

الطريقة الأولى :

الإيراد الحدى (الدخل الحدى)= معدل التغير لدالة الإيراد الكلى (الدخل الكلى)

الطريقة الثانية :

الإيراد الحدى (الدخل الحدى)=

السعر (١ + ١ / م ث)

مثال /٧-٢٤ ص ٢٦٦

- من دالة الطلب الآتية :
- ط= $\frac{١}{٣}$ ٣ - $\frac{١}{٣}$ ث

- إحسبى مرونة الطلب على السلعة عند السعر ٧ ريال
- <u>أوجدى الإيراد الحدى بطريقتين</u>

الحل

- ط= $\frac{١}{٣}$ ٣ - $\frac{١}{٣}$ ث
- إيجاد مرونة الطلب :
- المشتقة الأولى لدالة الطلب = - ١/٣
- **<u>الطلب عند السعر ٧</u>**
- ط= $\frac{١}{٣}$ ٣ - $\frac{١}{٣}$ ث
- ط= $\frac{١}{٣}$ ٣ - $\frac{١}{٣}$ × ٧ =
- ط= $\frac{١٠}{٣}$ - $\frac{٧}{٣}$ = ١

<u>المرونة</u>

م ث= $\frac{-١}{٣}$ × $\frac{٧}{١}$ = $\frac{-١}{٣}$ ٢

زيادة السعر بمقدار ١% سوف يؤدي الي نقص الطلب بما يعادل (-١/٣) ٢

الإيراد الحدي

- **الطريقة الاولى:**
- **اذا كانت دالة الإيراد الكلى = ١٠ ط ـ ٣ ط ٢**

اوجدي الايراد الحدي ؟

- الحل : -
- **الإيراد الحدى (الدخل الحدى) = ١٠ ـ ٦ ط**
- (هو التغير فى الإيراد الكلى نتيجة التغير فى الكمية المنتجة بوحدة واحدة أى أنه إيراد الوحدة الإضافية المنتجة .)
- **ولايجاد قيمة الايراد الحدي عندما يكون السعر ٧ و الكمية المطلوبة ١**
- **الإيراد الحدى (الدخل الحدى) = ١٠ ـ ٦ ط**
- **الإيراد الحدى (الدخل الحدى) = ١٠ ـ ٦ ×١ = ٤**

الطريقة الثانية

- الإيراد الحدى (الدخل الحدى) بمعلومية المرونة والسعر =
- السعر (١ + $\frac{١}{م ث}$)   م ث = -٧/٣ = - ٢.٣٣
- الايراد الحدي =
- ٧ (١ + $\frac{١}{(-٧/٣)}$) = ٧ (١ - $\frac{٣}{٧}$)
- = ٧ × $\frac{٤}{٧}$ = ٤

مرونة دالة العرض

- **تعريف مرونة العرض :**
- **حالات مرونة العرض :**
- **عرض لانهائى المرونة (المرونة تساوى مالانهاية)**
- **عرض مرن (المرونة > ١)**
- **عرض متكافىء المرونة (المرونة = ١)**
- **عرض قليل المرونة (المرونة< ١)**
- **عرض عديم المرونة (المرونة = صفر)**

دالة العرض

العلاقة طردية

معدل التغير فى ك ع عندما يتغير الثمن بريال واحد

ض= أ + ب (ث)

ض= ٥ + ٥ ث س

ك ع عندما ث = صفر

ب = د ض / د ث

م ض = (د ض / د ث) × (ث / ض)

مثال / مثال ٧-٢٩ ص ٢٧٤

إذا كانت دالة العرض لسلعة معينة كالتالي :

ض = ٢٠ث^{٣}

فأوجدي مرونة العرض عند السعر ٧ ريال للوحدة الواحدة

مرونة العرض =

المشتقة الأولى لدالة العرض × (السعر ÷ الكمية)

إيجاد مرونة العرض السعرية

مرونة العرض عند تغير السعر من ٧ الي ٨ ريال

ث	ك ط
٧	٦٨٦
٨	١٠٢٤

ث١ = ٧

ض = ٢٠ ث٣

$= ٢٠\ (٧)^{٣} = ٢٠ \times ٣٤٣ = ٦٨٦٠$

ث٢ = ٨

ض = ٢٠ ث٣

$= ٢٠\ (٨)^{٣} = ٢٠ \times ٥١٢ = ١٠٢٤٠$

$\text{م ث} = \frac{\Delta \text{ض}}{\Delta \text{ث}} \times \frac{\text{ث}}{\text{ض}} = \frac{\text{ض٢} - \text{ض١}}{\text{ث٢} - \text{ث١}} \times \frac{\text{ث١}}{\text{ض١}}$

$\text{م ث} = \frac{١٠٢٤٠ - ٦٨٦٠}{٨ - ٧} \times \frac{٧}{٦٨٦٠}$

$\text{م ث} = \frac{٣٣٨٠}{١} \times \frac{٧}{٦٨٦٠} = ٣.٤٥$

ايجاد مرونة العرض عند السعر ٧ ريال

ث = ٧

ض = ٢٠ث^{٣}

ك ط	ث
٦٨٦٠	٧
١٠٢٤٠	٨

ض = ٢٠ث^{٣}

= ٢٠ (٧)^{٣} = ٦٨٦٠

باستخدام التفاضل ض = ٢٠ث^{٣}

ث = **٦٠ث^{٢}** _ _Δ ض / Δ

م ض = = **٦٠ث^{٢}** × ٧ / ٦٨٦٠

م ض = = **٦٠(٧)^{٢}** × ٧ / ٦٨٦٠ = ٣

أي ان أي تغيير طفيف في السعر سيؤدي الي تغير الكمية المعروضة بمقدار ٣ امثال التغير في السعر

الدخل بين الاستهلاك والادخار

- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الإستهلاك حيث الاستهلاك دالة فى الدخل
- قيمة الميل الحدي للاستهلاك (م ح س) تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أى كسر موجب)
- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار حيث الادخار دالة في الدخل
- قيمة الميل الحدي ل للادخار (م ح د) تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أى كسر موجب) كذلك .
- الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = ١

- مضاعف الاستثمار : هو الزيادة النهائية في الدخل نتيجة ارتفاع حجم الاستثمار .
- م.ر = $\frac{١}{\text{م. ح. د}}$ = $\frac{١}{\text{١ - (م. ح. س)}}$

م. ح. د = الميل الحدي للأدخار

م. ح. س= الميل الحدي للأستهلاك

س = ٢٥ + ٠,٨ ل + ٠,٢ ل٢

اوجدي الميل الحدي للاستهلاك ؟

- م ح س = ٠,٨ + ٠,٤ ل

- **اذا كان الميل الحدي للاستهلاك ٩٠% ، اوجدي مضاعف الاستثمار ؟**

- م.ر = ١ / (١ - م.ح. س) = ١ / (١ – ٠,٩٠) = ١ / ٠,١٠

اذن م . ر = ١٠

- **اذا كان الميل الحدي للادخار ٢٠% فان مضاعف الاستثمار يساوي ؟**

- م.ر = $\frac{١}{\text{م. ح. د}}$ = $\frac{١}{٠,٢٠}$ = ٥

- **اذا كان مضاعف الاستثمار = ٨ ، فان الميل الحدي للاستهلاك يساوي ؟**

- ٨ = $\frac{١}{\text{م. ح. د}}$ ، اذن م ح د = $\frac{١}{٨}$ = ٠,١٢٥

اذن م ح س = ١ - ٠,١٢٥ = ٠,٨٧٥

٨

الفصل الثامن
النـهايات العظمى والصغرى

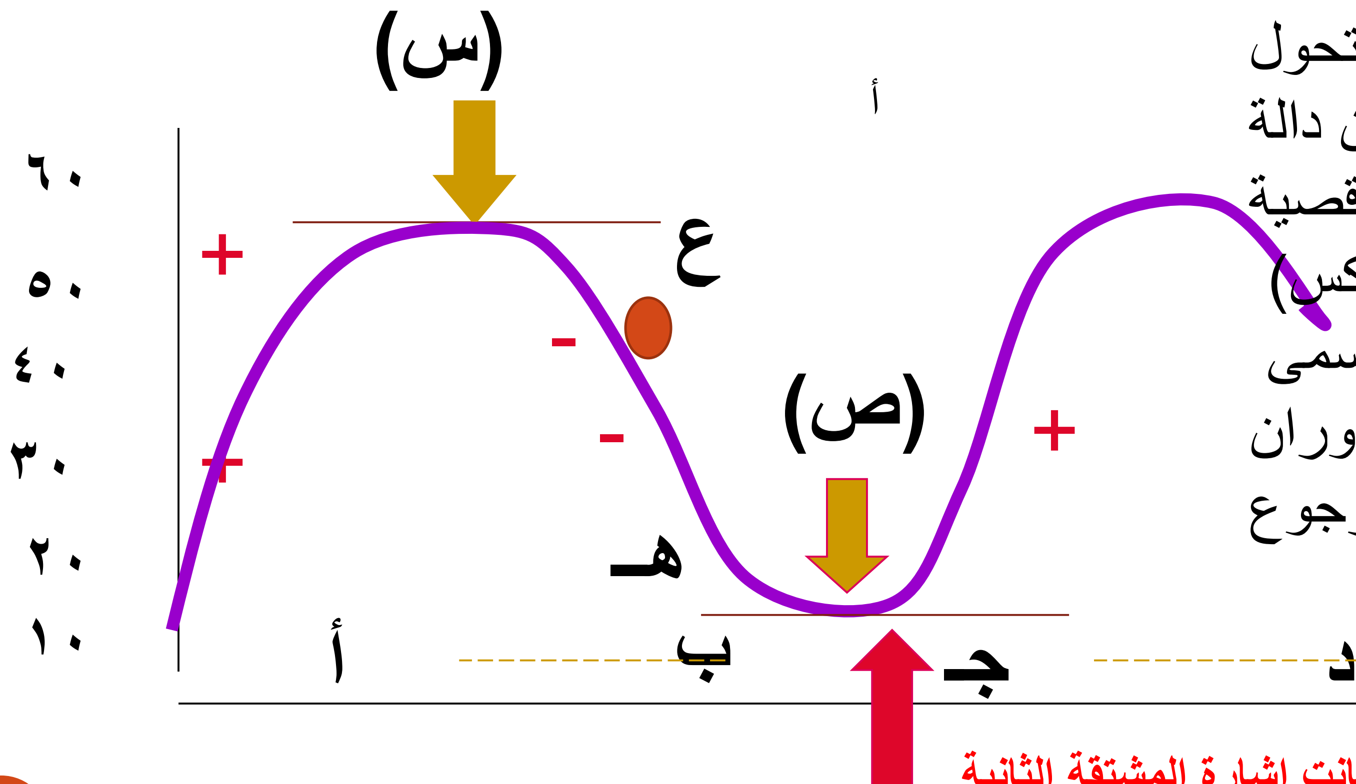
النهاية الصغري والعظمي

- النهاية العظمي هي اعلي نقطة يصل إليها المنحني ، بينما اقل نقطة يصل اليها المنحني تكون نقطة النهاية الصغرى

مفهوم النهايات العظمى والصغرى للدالة:

- النقطة التي تتحول عندها الدالة من دالة تزايدية إلى دالة تناقصية (أو العكس) تسمى نقطة الدوران نقطة الرجوع

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة.:.



إذا كانت إشارة المشتقة الثانية موجبة يعنى ذلك وجود نهاية صغرى للدالة.:.

- **خطوات إيجاد النهايات العظمى أو الصغرى :**
- ١ ـ يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة ويرمز لها د ص / د س
- ٢ ـ يتم مساواة المشتقة الأولى بالصفر لإيجاد النقاط الحرجة (قيم س) ، وهي تلك النقط التي يكون عندها إما نهاية عظمى للدالة أو نهاية صغرى .
- ٣ ـ يتم إيجاد المشتقة الثانية ويرمز لها لها ص ״ أو

$$\frac{د^{٢}ص}{د\,س^{٢}}$$

- ـ تحديد نوع النهاية (عظمى ـ صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة

∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

- 5 ـ إيجاد نقطة النهاية ، أي إيجاد ألإحداثي السيني والصادي للنقطة،

حيث يتم إيجاد قيمة ص بالتعويض بقيمة س التي تم الحصول عليها في الخطوة الثانية في الدالة الأصلية .

مثال ٨-١ / ٢٩٤

اختاري الاجابة الصحيحة

١ـ إذا كانت عدد الوحدات المباعة س ،والسعر ث = ٢٠٠ ـ ٠,٢ س

فإن دالة الايراد الكلي ي= ٢٠٠٠ س ـ ٠,٢ س^{٢}

أ) الإجابة صحيحة ب) الإجابة خطأ

الإجابة

الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

= س (٢٠٠ ـ ٠,٢ س)

ي = ٢٠٠ س ـ ٠,٢ س^{٢}

مثال ٨-١ / ٢٩٤

٢-إذا كانت دالة الايراد الكلي ي= ٢٠٠ س – ٠,٢ س٢

دالة التكلفة ت = ٥٠ س + ١٠٠٠٠

فإن دالة الربح الكلي :

أ) ٠,٢ س٢ + ١٥٠ س – ١٠٠٠٠

ب) -٠,٢ س٢ + ١٥٠ س – ١٠٠٠٠

ج) -٠,٢ س٢ + ٢٥٠ س + ١٠٠٠٠

د) لاشيء مما سبق

الاجابة

الربح (ر) = الإيراد الكلي – التكاليف الكلية

الربح الكلي (ر) = ٢٠٠ س – ٠,٢ س٢ – (٥٠ س + ١٠٠٠٠)

= ٢٠٠ س – ٠,٢ س٢ – ٥٠ س – ١٠٠٠٠

دالة الربح الكلي (ر)= -٠,٢ س٢ + ١٥٠ س – ١٠٠٠٠

٣ ـأذا كانت دالة الربح الكلي

ر = ـ٢,٠ س^{٢} + ١٥٠ س – ١٠٠٠٠

فإن المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي (الربح الحدي)

أ) $\frac{\text{د ر}}{\text{د س}}$ (رَ) = - ٤,٠ س + ١٥٠

ب) $\frac{\text{د ر}}{\text{د س}}$ (رَ) = + ٤,٠ س + ١٠٠٠٠

ج) $\frac{\text{د ر}}{\text{د س}}$ (رَ) = - ٢,٠ س + ١٥٠

٤ـإذا كانت دالة الربح الحدي (رَ) = - ٤,٠ س + ١٥٠

فإن عدد الوحدات التي تحقق اعلي الربح (س):

- **أ) ١٥٠ ب) ٢٥٠ ج) ٣٧٥ د) ٥٠٠**

الإجابة : ـ٤,٠ س + ١٥٠ = صفر

١٥٠= ٤,٠ س س = ٣٧٥

٥- إذا كانت دالة الربح الحدي (رَ) = - ٠,٤ س + ١٥٠

فإن المشتقة الثانية لدالة الربح الكلي

د٢ ر / د س٢ = (رً) = -٠,٤

أ) الإجابة صحيحة ب) الإجابة خطأ

٦- إذا كانت المشتقة الثانية لدالة الربح الكلي = -٠,٤

فإنه يمكن القول بأنه توجد ____________ لدالة الربح

أ) نهاية صغري ب) نهاية عظمي ج) لاشيء مما سبق

٧- إذا كانت دالة الربح (ر) = -٢,٠ $س^٢$ + ١٥٠س - ١٠٠٠٠ وعدد الوحدات التي تحقق اعلي الربح=٣٧٥

فإن مقدار الربح: (عند النهاية العظمى) = ٥٠٠٠

أ) الإجابة صحيحة ب) الإجابة خطأ

الإجابة ر = -٢,٠$(٣٧٥)^٢$ + ١٥٠ × ٣٧٥ - ١٠٠٠٠ =

=-٢٨١٢٥+ ٥٦٢٥٠ -١٠٠٠٠= ١٨١٢٥ ريال

٨- أذا كانت عدد الوحدات المباعة س،والسعر ث = ٢٠٠ - ٢,٠ س

وعدد الوحدات التي تحقق اعلي الربح=٣٧٥

فإن سعر بيع الوحدة (عند النهاية العظمى) =

أ) ١٥٠ ب) ٢٥٥ ج) ٣٧٥ د) ٥٠٠

الإجابة ث = ٢٠٠ - ٢,٠ (٣٧٥) ث = ١٢٥ ريال

تمرين : ٣ ص ٣٢٢ : اختاري الاجابة الصحيحة

إذا كانت تكاليف إنتاج (س) وحدة إنتاج من منتج معين تتحدد بالعلاقة التالية:

ت= ٢٠ ـ ٦ س+ س^{٢}حيث (ت) تمثل تكاليف الإنتاج بالمليون ريال

١ـ فإن إذا كانت المشتقة الأولى لدالة التكاليف (التكلفة الحدية) :

د ت/دس = (تَ)= ـ٦ + ٢ س

أ) الإجابة صحيحة ب) الإجابة خطأ

٢ـ إذا كانت المشتقة الأولى لدالة التكاليف :

(تَ)= = ـ٦ + ٢ س ،

فإن حجم الإنتاج الذي يحقق انتاج عند أدنى حد للتكلفة .

أ) ٣ وحدات ب) ٥ وحدات ج) ٨ واحدات د) لاشيء مما سبق

- ٣ـ إذا كانت المشتقة الأولى لدالة التكاليف(التكلفة الحدية)

(تَ)= = ـ٦ + ٢ س

فإن المشتقة الثانية لدالة التكاليف (أدنى مستوى ممكن من التكاليف.

د٢ ت / د س٢ (تً) = ٢

أ) الإجابة صحيحة ب) الإجابة خطأ

- **٤ـ وهذا يعني وجود __________ لدالة التكاليف**

أ) نهاية صغرى ب) نهاية عظمي

٥ـ وتكون مقدار التكلفة(أدنى مستوي للتكلفة)

أ) ٣ ريال ب) ١٠ ريال ج) ١١ ريال د) لاشيء مما سبق

الإجابة : ت = ٢٠٠ ــ ٦ (٣) + (٣)٢ ت = ١١ مليون ريال

- **٦ـ بناء علي الاجابة في السؤال (٥)**

فإن التكلفة المتوسطة (التقريب لإقرب رقم صحيح) :

أ) ٣ ريال ب) ٤ ريال ج) ٥ ريال د) لاشيء مما سبق

الإجابة : التكلفة المتوسطة = التكلفة الكلية / عدد الوحدات المنتجة = ١١ / ٣ = ٣,٦٧ مليون

٩

الرياضة المالية

نتعرض هنا للأدوات الرياضية التى تستخدم فى التحليل المالى

- **أنواع الفائدة :**

١. **الفائدة البسيطة:أصل المبلغ ثابت خلال مدة الإستثمار أو الإقراض.والنتيجة أن مقدار الفائدة عن كل فترة زمنية متساوى مع مقدارها لأى فترة زمنية أخرى**

= أصل المبلغ الثابت × معدل الفائدة)

١. **الفائدة المركبة:أصل المبلغ يتزايد بإضافة فائدة(عائد) كل فترة زمنية إليه.والنتيجة الفائدة تتزايد بزيادة عدد الفترات الزمنية.**

تابع الرياضة المالية

لدينا مجموعة من المتغيرات سنرمز لها كالتالى:

١. معدل العائد (الفائدة):يعبر عنه بنسبة مئويّة على أساس سنوى ويرمز له بالرمز (ع)
٢. الفترة الزمنية أو مدة الإستثمار ويرمز لها (ن)
٣. أصل المبلغ الموجود أو المبلغ المستثمر: يرمز له (أ)
٤. العائد (الفائدة) يرمز لها بالرمز ف
٥. جملة المبلغ أو مبلغ السداد لقرض أو المبلغ المستحق لوديعة ما يرمز له ج

الفائدة البسيطة

١. مبلغ العائد (الفائدة) ف =أصل المبلغ× المعدل × المدة

= أ × ع ×ن

اشتقاق عدة قوانين :

أصل المبلغ أ = مبلغ الفائدة /(المعدل x المدة)= ف/(ع x ن)

المدة ن = مبلغ الفائدة / (الأصل xالمعدل) = ف/ (أ x ع)

المعدل ع = مبلغ الفائدة / (الأصل x المدة) = ف/ (أ x ن)

امثلة

١٠ ـ١ ص ٣٦٣

- أودع شخص ١٠٠٠٠ ريال لمدة ٥ سنوات بمعدل فائدة ٨ %
- ما هو مبلغ العائد (الفائدة) ؟
- ف = أ × ع ×ن = ١٠٠٠٠ × ٠,٠٨ ×٥ = ٤٠٠٠ ريال

١٠ ـ٢ ص ٣٦٣

أستثمر شخص مبلغ من المال بفائدة بسيطة بمعدل ٩ %

وفى نهاية ٣ سنوات كانت العوائد (الفوائد) = ١٣٥٠ فما هو أصل المبلغ المستثمر؟

- أ =ف /(ع ×ن) = = ١٣٥٠/(٠.٠٩ × ٣) = ٥٠٠٠ ريال

تابع أمثلة

- **مثال ١٠-٣ ص ٣٦٣**
- **أقترض شخص مبلغ ٧٥٠٠ ريال من أحد البنوك التجارية بفائدة بسيطة ٩ % سنويا ، وفى نهاية مدة معينة وجد**
- **أن الفوائد المستحقة عليه = ٢٠٢٥ ريال**
- **فما هي الفترة الزمنية ن ؟**

ن = ف/ (أ x ع)=

$$\frac{٢٠٢٥}{٧٥٠٠ \times ٠,٠٩} = ٣ \text{ سنوات}$$

- **مشاكل مدة الاستثمار:**
- إذا كانت مدة الاستثمار أقل من سنة:
- مثلاً شهور / أيام / أسابيع   لابد أن تحول إلى سنوات
- (الفترة) الشهور = عدد الأشهر / ١٢
- (الفترة) أسابيع = عدد الأسابيع / ٥٢
- الفترة) أيام = عدد الأيام / ٣٦٠

مشاكل مدة الإستثمار

يلاحظ أن معدل الفائدة يكون عن العام الواحد وبالتالى يتم تعديل المدة – إذا لم تكن سنوات – إلى مدة بالسنوات كالتالى :

في حالة الأشهر: عدد الأشهر÷١٢

فى حالة الأيام : عدد الأيام ÷ ٣٦٠

فى حالة الأسابيع:عدد الأسابيع ÷ ٥٢

أمثلة

مثال ١٠ ـ٦ ص ٣٦٥

أقترض شخص مبلغ ١٥٠٠٠ ريال من أحد البنوك التجارية لمدة ٢٥ أسبوع بمعدل عائد بسيطة ٨% سنويا ، فما هى العوائد المستحقة عليه

أ = ١٥٠٠ ريال / ن = ٢٥ أسبوع / ع = ٨%

ن = ٢٥ أسبوع = ٢٥ / ٥٢ سنة = سنة

ف = أ × ع ×ن = ١٥٠٠ × ٠,٠٨ × ٢٥ / ٥٢ = ٥٧٦,٩٢ ريال

تابع الفائدة البسيطة

مثال اضافي :إذا كان أصل المبلغ ١٢٠٠ ريال وأصبح بعد بعد سنتين اصبح ١٢٤٠ ريال   فإن مبلغ العائد

الحل:

مبلغ الفائدة= جمله المبلغ – اصل المبلغ

= ١٧٤٠ـ ١٢٠٠ = ٥٤٠

مثال ١٠ - ٧ ص 356

- **أقترض شخص مبلغ ٢٥٠٠٠ ريال من أحد البنوك التجارية لمدة ٤ أشهر بفائدة بسيطة ٩% سنويا**
- **فما مقدار الفوائد**
- ف = أ × ع ×ن
- أ = ٢٥٠٠٠ ريال / ع= ٩% = ٠,٠٩ / ن = ٤/ ١٢ سنة
- **ف**= أ× ع× ن = **٢٥٠٠٠** × ٠,٠٩ × ٤/ ١٢ = ٧٥٠ريال

مثال ١٠ - ١٤ ص ٣٧٢

- أودع شخص مبلغ ٥٠٠٠٠ ريال في أحد البنوك التجارية بفائدة بسيطة ١٠ %
- فما الرصيد بعد ٥ سنوات
- جـ = أ + ف
- جـ = أ + (أ × ع × ن)
- جـ = أ(١+ ع ن)
- ج = ٥٠٠٠٠ (١ + ٠,١٠ × ٥) = ٧٥٠٠٠ ريال
- الرصيد بعد ١٠٠ يوم
- ج = ٥٠٠٠٠ (١ + ٠,١٠ × $\frac{١٠٠}{٣٦٠}$) = ٥١٣٨٨,٨٩ ريال
-

مثال ١٠ - ١٥ ص ٣٧٣

- أودع شخص مبلغ ما في أحد المصارف التجارية بمعدل فائدة بسيطة ٨,٥% وفى نهاية ١٥ شهر وجد جملة المستحق ١٨٨٠٦,٢٥ريال ، فما هو المبلغ الأصلي ؟

$$\text{أ} = \frac{\text{جـ}}{١ + (\text{ع} \times \text{ن})}$$

$$\text{أ} = \frac{١٨٨٠٦,٢٥}{١ + \left(\frac{٨,٥}{١٠٠} \times \frac{١٥}{١٢}\right)} = ١٧٠٠٠ \text{ ريال}$$

مثال ١٠-١٦ ص ٣٧٣

- **استثمر شخص مبلغ ٥٠٠٠٠ ريال في أحد المصارف التجارية بمعدل فائدة بسيطة وفى نهاية ٧ أشهر وجد جملة المستحق له ٥١٩٥٠ ريال، فما هو معدل الفائدة البسيطة؟**

- ع = $\frac{\text{ج} - \text{أ}}{\text{أ} \times \text{ن}}$ = $\frac{٥١٩٥٠ - ٥٠٠٠٠}{٥٠٠٠٠ \times (٧/١٢)}$
- = ٦,٦٩ % سنويا

البسيطة
طبعة ٢٠١٢ / ١٤٣٣هـ - ص ٣٦٩

البسيطة

طبعة ٢٠١٢ / ١٤٣٣هـ - ص ٣٦٩

طبعة ٢٠١٢ / ١٤٣٣هـ - ص ٣٦٩-٣٧٠

الفائدة المركبة

عند استخدام طريقة الفائدة المركبة،يتم إضافة مقدار فائدة كل فترة زمنية الى أصل القرض .

- القانون المستخدم : ج= أ(١+ع)^{ن}

الاستثمار بنظام الفوائد المركبة :

إذا كان صاحب رأس المال ليس في حاجة إلى العائد على أمواله ، فإنه يستطيع أن يستثمر هذا العائد ، وإذا تم استثمار العائد أو الفائدة مثل استثمار رأس المال الأصلي بأن يتم إضافتها أو تعليتها على الأصل المُستثمر ليتكون رأس مال أكبر يتم استثماره بنفس شروط استثمار رأس المال الأول ، وفي هذه الحالة يُسمى هذا النظام بنظرية الفائدة المركبة.

وفي سبيل حساب الفائدة المركبة لمبلغ أو جملة الدفعات أو غير ذلك ، نستخدم الرموز التالية :

أ : رأس المال (أصل المبلغ) المستثمر بالريال .

ع : معدل الفائدة (سنوي ، نصف سنوي ، ربع سنوي ، ...إلخ)

ن : مدة الاستثمار بوحدات زمن تتفق مع نظام معدل الفائدة

جـ : جملة المبلغ

ف : الفائدة (عائد رأس المال)

فإذا كان لدينا المبلغ المُستثمر أ ، على أساس معدل فائدة مركبة ع % ، ولمدة زمنية قدرها ن ،

فإنه في نهاية الفترة الزمنية ن تكون جملة المبلغ على أساس الفائدة المركبة هي :

$$جـ = أ\,(1 + ع)^{ن}$$

حيث : $(1+ع)^{ن}$ تمثل جملة وحدة النقود عند استثمارها على أساس الفائدة المركبة بمعدل ع % وفي نهاية مدة استثمار قدرها ن سنة.

الفائدة المركبة

عند استخدام طريقة الفائدة المركبة،يتم إضافة مقدار فائدة كل فترة زمنية الى أصل القرض .

- القانون المستخدم : ج= أ(١+ع)^{ن}

مثال ١٠ ـ ٢٨ ص ٣٨٦

جملة مبلغ ٥٠٠٠ ريال فى نهاية ٥ سنوات بمعدل فائدة مركبة ١١%

- الجملة ج = ٥٠٠٠ (١ + ٠,١١)^{٥} =٨٤٢٥,٣ ريال
- مثال ١٠ ـ ٣٠ ص ٣٨٧

أودع شخص مبلغ ١٠٠٠٠ ريال بفائدة مركبة ٧ %

أوجدي الجملة بعد ٥ سنوات و ٤ أشهر

المدة = ٦٤ شهر = ٦٤ ÷ ١٢ سنة

ج = ١٠٠٠٠ (١ + ٠,٠٧)$^{٦٤/١٢}$ = ١٤٣٤٥,٤٣ ريال

- مثال اضافي : <u>اختاري الاجابة الصحيحة</u>

أودع شخص مبلغ ١٠٠٠٠ ريال بفائدة مركبة ٧ %

فإن الجملة بعد ٧ سنوات و ٦ أشهر(التقريب لاقرب رقم صحيح)

أ) ١٦٦١٠ريال ب) ١٧٦١٠ريال ج) ١٨٦١٠ريال

الاجابة

- ج = ١٠٠٠٠ (١ + ٠,٠٧)^{٧,٥}= ١٦٦١٠.٣٣ ريال

مثال ١٠-٣٤ (حساب الفائدة المركبة)
طبعة ٢٠١٢ / ١٤٣٣هـ - ص ٣٨٥

- ف = أ $\left[(١ + ع)^{ن} - ١ \right]$
- المبلغ المستثمر ١٥٠٠٠ ريال-معدل الفائدة المركبة ٦,٥%
- ن = ١٥,٥ سنة – مقدار الفائدة المركبة لهذا الاستثمار ؟

انتهى بحمد الله